Matemáticas 3

Santiago Alonso Palmas Pérez
Rocio Guadalupe Balderas Robledo

CORREO del MAESTRO

Sistema de clasificación Melvil Dewey

372.7
P35
2014 Palmas Pérez, Santiago Alonso
Matemáticas 3 / Santiago Alonso Palmas Pérez, Rocío Guadalupe Balderas Robledo ; edición Isaura González Gottdiener ; ilustraciones Graciela Pérez Guzmán... [*et al.*] .– México : Correo del Maestro, 2014
268 p. : il.

ISBN 978-607-9034-50-4

1. Matemáticas – Estudio y enseñanza. I. Balderas Robledo, Rocío Guadalupe, coaut. II. Pérez Guzmán, Graciela, il. III. t

Coordinación Editorial
Roxana Martín-Lunas Rodríguez

Autoría
Santiago Alonso Palmas Pérez y Rocío Guadalupe Balderas Robledo

Edición
Isaura González Gottdiener, Elena Martín-Lunas Rodríguez

Colaboración especial
Pedro Damián Dimas López, Emiliano Mora Valladares

Revisión técnica y pedagógica
Muriel del Olmo, Alejandro Schmidt

Corrección de estilo
Eduardo Mendoza Tello, Alógrafo/Rosa Trujano López

Diseño de interiores y cubierta
Alba Rojo, Maia Fernández Miret, C&Newton Estudio, Monocromo

Formación electrónica
Alba Rojo, Maia Fernández Miret, Alógrafo/Rosa Trujano López

Coordinación iconográfica
Elena Martín-Lunas Rodríguez

Ilustraciones
Grupo Adcom: Graciela Pérez Guzmán, Javier Pérez Guzmán, José Eduardo Sánchez Pérez, Matías Echenique

Fotografía
Carlos Hahn, Magali Sarmiento Fradera, Agencias: Shutterstock, Nasa, Pixabay, Picdrom

Créditos iconográficos
© Carlos Hahn: pp. 81, 90 (arriba derecha y abajo izquierda y centro), 161, 162, 173, 183, 223, 227, 235, 248.
© Magali Sarmiento: pp. 27, 32, 49, 58, 65 (abajo)

Obra de la cubierta
© *M3* (1999), Alba Rojo' (1963), técnica: metal pintado, medida: 118 x 58 x 58 cm, fotografía: Carlos Hahn

ISBN: 978-607-9034-50-4

Primera edición: 2014
Edición revisada y actualizada: 2017
Primera reimpresión: 2018

CORREO DEL MAESTRO, S.A. DE C.V.
Av. Reforma No. 7 Int. 403,
Cd. Brisa, Naucalpan Estado de México, México, C.P. 53280
Tels. 53-64-56-70 / 53-64-56-95
correo@correodelmaestro.com
www.correodelmaestro.com

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Reg. Núm. 2817
Impreso en México

Créditos iconográficos
© Carlos Hahn: pp. 81, 90 (arriba derecha y abajo izquierda y centro), 161, 162, 173, 183, 223, 227, 235, 248.
© Magali Sarmiento: pp. 27, 32, 49, 58, 65 (abajo)

Presentación

Querido alumno:

La matemática es una herramienta poderosa de razonamiento y una fuente de conocimiento, por medio de ella podemos resolver problemas abstractos, prácticos, sociales y culturales.

CORREO DEL MAESTRO pone en tus manos el libro *Matemáticas 3* que te ayudará a que este conocimiento forme parte de tu cultura científica durante toda la vida. A medida que realices las actividades y analices las situaciones planteadas en el texto irás adquiriendo diversas habilidades que conformarán tu proceso de aprendizaje, tales como indagar sobre lo que sabes, construir cadenas de razonamientos, relacionar conceptos, hacer cálculos, representar un problema mediante expresiones algebraicas, aplicar técnicas cada vez más complejas, y, un aspecto muy importante, a comunicar tus ideas.

A lo largo del curso trabajarás de varias formas: de manera autónoma, en conjunto con tus compañeros, y con el apoyo y guía de tu maestro. Todos aprendemos de diversas maneras, unas veces haciendo, otras pensando o bien, leyendo o jugando. Por ello, incluimos varios recursos de apoyo que te servirán para que tu aprendizaje sea más rico. También pretendemos mostrarte de forma clara y amena numerosos ejemplos relacionados con otras áreas del conocimiento, como la física, la biología, la geografía, la economía, la arquitectura, entre otras, encaminados a alentar aún más tu curiosidad y a motivar tus preguntas.

La intención de este libro de texto es que por medio del proceso de aprendizaje de esta ciencia puedas tomar posturas fundamentadas ante situaciones que te afecten. Esto con el fin de que tengas elementos para tomar decisiones que te ayuden a ser mejor individuo, más responsable de ti y de tus acciones en sociedad. Podrás entonces convertirte en una persona activa, en un agente positivo de cambio.

Querido maestro:

El afán de saber y la capacidad de asombro de los estudiantes y los docentes son precisamente la razón de ser de este libro, y el motivo principal de su labor diaria. Es por ello que este texto fue elaborado teniendo presentes no sólo a los alumnos, sino a los maestros que conforman con ellos el núcleo primordial del hecho pedagógico: el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Le invitamos a recorrer la siguiente sección "Conoce tu libro" que presenta cómo se estructuran los contenidos del libro en los cinco bloques y las distintas formas de trabajo que éste propone. Enseñar matemáticas es indudablemente un reto, pero al mismo tiempo es una oportunidad para fomentar el desarrollo del pensamiento científico y el gusto por esta ciencia. Un curso atractivo puede ser el detonante de esta vocación en sus estudiantes.

Con gran admiración por su trabajo, en CORREO DEL MAESTRO deseamos que este texto sea un referente sólido para usted.

Los autores y editores

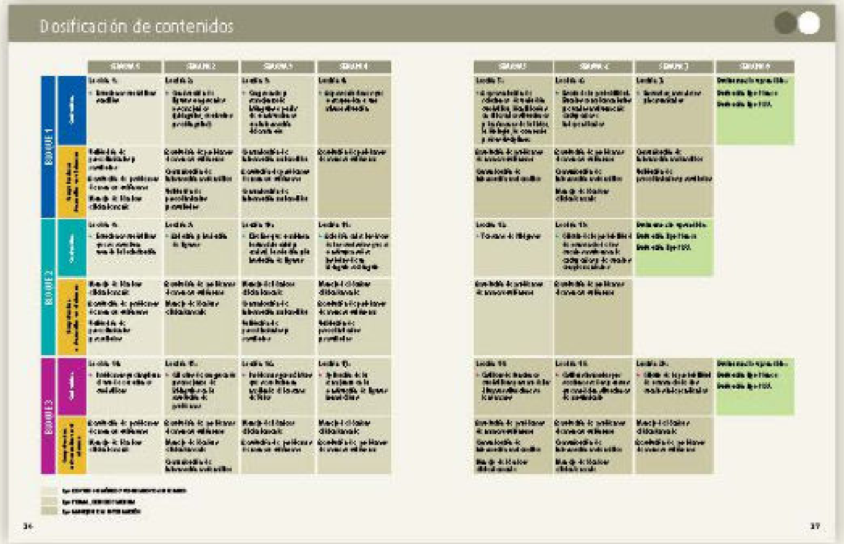
Te sugerimos leer con el apoyo de tu maestro,* las siguientes descripciones para conocer cómo se organiza tu libro.

Índice de contenidos

Incluye las lecciones numeradas consecutivamente y organizadas en bloques, ejes y temas. Cada bloque termina con una evaluación final, del tipo de evaluaciones nacionales e internacionales (PISA). Se presentan los contenidos de cada lección abreviados.

Dosificación de contenidos

Es una tabla simplificada para que conozcas cómo se pueden distribuir los contenidos de las lecciones por semana en cada bimestre y sepas qué competencias desarrollarás en cada caso.



Bloque

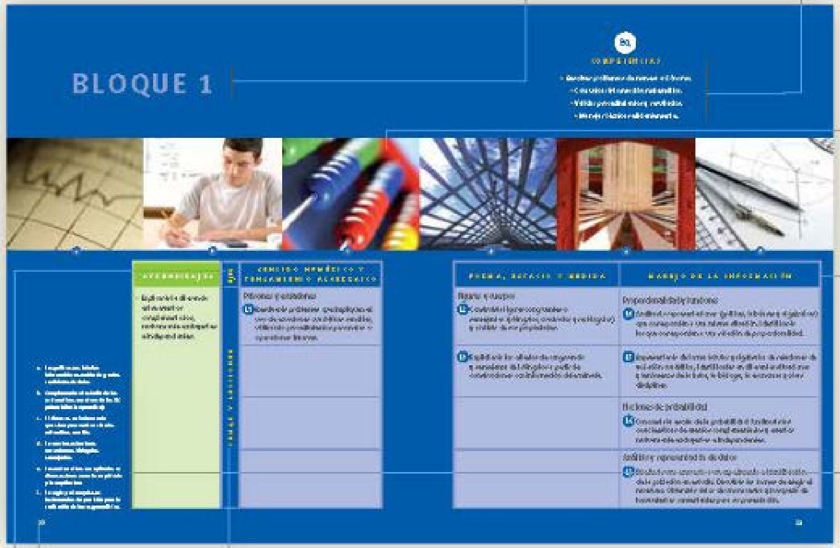
Los cinco bloques que integran este libro se trabajarán durante el calendario anual escolar. Cada uno cubre un bimestre y se identifican con diferente color.

B1 B2 B3 B4 B5

* [...] Por razones de corrección política, que no de corrección lingüística, se ha extendido la costumbre de hacer explícita la alusión a ambos sexos [...]. Se olvida en estos casos que en la lengua está prevista la posibilidad de referirse a colectivos mixtos a través del género gramatical masculino, posibilidad en la que no debe verse intención discriminatoria alguna, sino la aplicación de la ley lingüística de la economía expresiva [...] Por otra parte, [se] ha suscitado la creación de soluciones artificiosas que contravienen las normas de la gramática como "las y los ciudadanos". Véase: Diccionario panhispánico de dudas, Real Academia Española, 2005, sustento que se utiliza en este libro

Inicio de bloque

Los cinco bloques que integran este libro se trabajarán durante el calendario anual escolar.



- Número del bloque.
- Competencias del programa.
- Fotografías relacionadas con los contenidos que se desarrollan en cada bloque.
- Tabla con los contenidos y los aprendizajes esperados del programa, organizados en lecciones, ejes y temas.
- Pie de las fotografías que ilustran el inicio del bloque.
- Número de página. Encontrarás el inicio de cada bloque, tema y lección, así como las evaluaciones.
- Los ejes son las tres áreas del conocimiento matemático que se incluyen en cada bloque:

  Sentido numérico y pensamiento algebraico es el relacionado con el lenguaje matemático.

  Forma, espacio y medida concentra aspectos que implican a la geometría y la medición.

  Manejo de la información te permitirá establecer tendencias a partir de la información de distintas situaciones, traducida en tablas y gráficas.
- Temas y lecciones. En el índice verás cuántos temas y lecciones tiene cada bloque.

Engánchate. Sección con un texto ameno en el que conocerás la contribución que algunos personajes han hecho a lo largo de la historia al desarrollo científico-tecnológico del mundo utilizando las matemáticas. Concluye con preguntas y ejemplos que te motivarán a trabajar en cada una de las lecciones.

El texto va acompañado de fotografías e ilustraciones relacionadas con el tema.

- Lee más... Un vínculo para conocer más sobre el personaje, y una referencia bibliográfica de temas relacionados con matemáticas y otras ciencias.

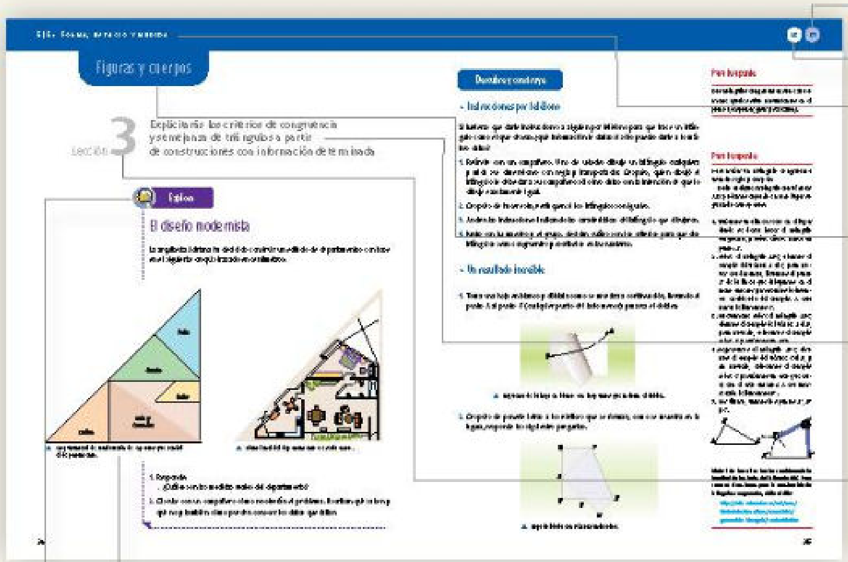
Inicio de lección

El **contenido** de la lección inicia con la exploración de una situación problemática. Después, siguiendo una secuencia didáctica y por medio de diversas actividades, podrás seguir un proceso de aprendizaje gradual.

NOTA: Es importante que tomes apuntes en tu cuaderno conforme vayas construyendo el conocimiento, es decir, a medida que intentes resolver las actividades que se plantean a lo largo de la secuencia.

El maestro ya sabe que para que construyas el conocimiento es necesario, primero, que te intereses en todos los problemas planteados que incluyen estas situaciones didácticas desafiantes.

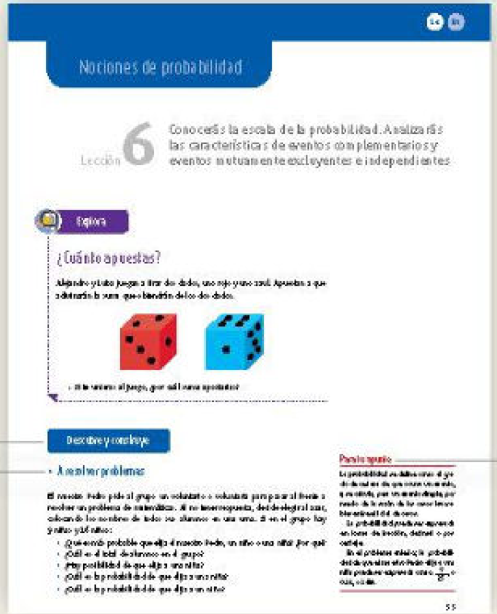
Maestro: Cada lección está diseñada como una serie de situaciones didácticas para que usted las presente a sus alumnos y con su ayuda, reflexión personal y trabajo colaborativo, los alumnos puedan proponer y validar sus procedimientos y soluciones.



- **Número del bloque.**
- **Número de la lección.**
- **Eje** correspondiente según el tema.
- **Título** del **tema.**
- Contenido de la **lección.**
- **Número de lección.** Sigue una secuencia numérica a lo largo de todo el libro.

- **Explora.** Es una actividad de inicio de cada lección, en ella se presenta un dilema o desafío que enfrentarás, en un primer momento, utilizando los aprendizajes previos y métodos personales. Posteriormente, al recorrer toda la lección tendrás los conocimientos necesarios para poder regresar a resolver la situación utilizando técnicas o procedimientos más eficientes.
- **Imágenes.** Te ayudarán a comprender los contenidos y a trabajar con ellos. Principalmente son dibujos, esquemas, gráficas y algunas fotografías. La mayoría de las imágenes complementan el contexto de cada actividad, por lo que forman parte del texto, sólo algunas, cuando se requiere, se acompañan con un pie descriptivo.

- **Descubre y construye.** En la secuencia de cada tema y lección avanzarás mientras resuelves otras actividades que representan distintos retos o situaciones problemáticas. En todas ellas deberás poner en práctica tus competencias matemáticas y de lectura y requerirás de una actitud de trabajo y reflexión. Analiza los pasos que has seguido y descubre nuevas estrategias, técnicas y procedimientos hasta que logres resolver el dilema inicial. Te sugerimos realizarlas en el orden propuesto.



- **Para tu apunte.** Breve explicación a manera de formalización para que puedas seguir trabajando durante la lección. En algunos casos contiene, resaltados en negritas, términos matemáticos, que son conceptos cuyo significado se explica en la secuencia de la lección. Su definición formal se incluye en el glosario ubicado al final del libro.
- **Título de la actividad.**

Trabaja en cada lección de varias maneras:

Individualmente. Es posible resolver cada actividad de esta manera, pero se indican especialmente para las modalidades **Explora** y para algunas actividades de investigación. Una parte importante de los ejercicios y problemas que resolverás en el libro corresponden a situaciones de la vida diaria.

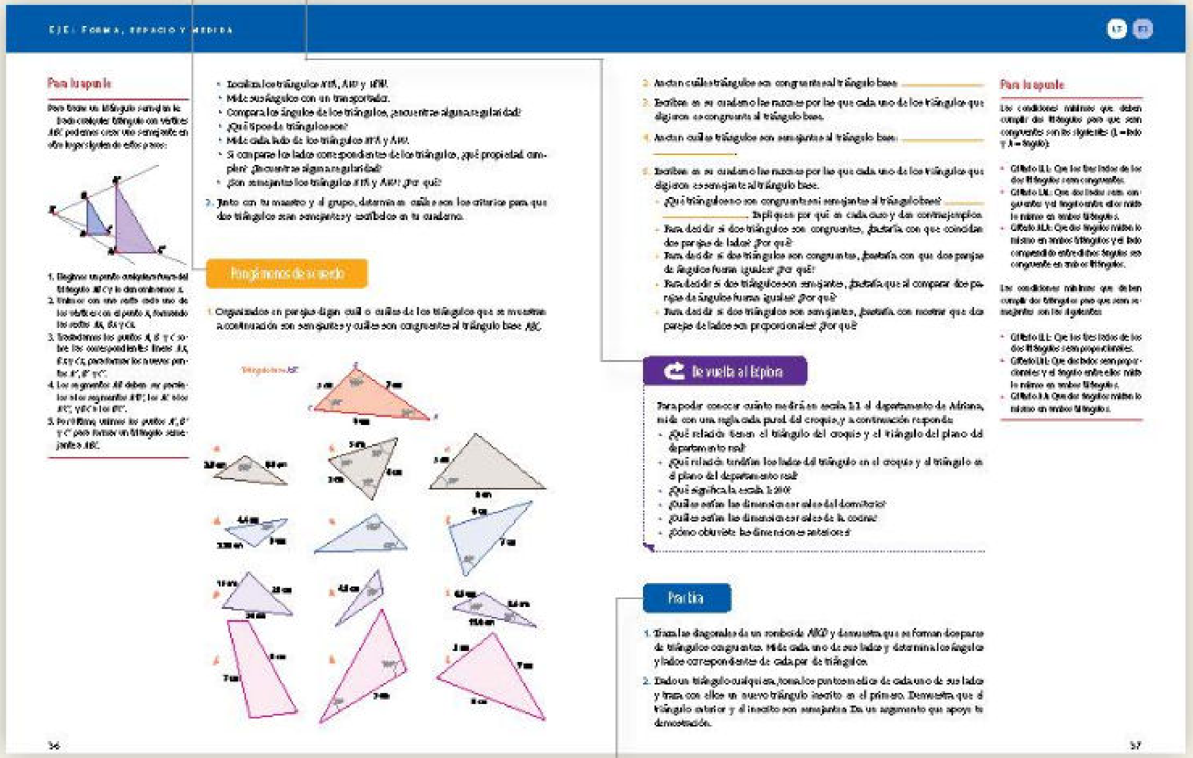
Colectivamente. Aprendemos socialmente, por ello es importante contrastar lo que se aprende y saber expresar nuestras ideas. Para comunicar a tus pares, a tu equipo o al grupo y para validar el proceso por el que llegaste a tus resultados, tendrás que recurrir al debate y ejercitar la argumentación.

En todas las actividades podrás debatir con tu grupo acerca de los procesos, los procedimientos y las técnicas utilizadas, así como, en algunos casos, las implicaciones sociales de los resultados que obtuviste. Reflexiona siempre sobre lo que has hecho y aprende de ello dedicando el tiempo necesario para conseguirlo.

Tienes que saber que el grado de dificultad de un reto matemático está relacionado con tu experiencia y con el contexto en el que se plantea; interesarte en temas que no conoces ampliará tu cultura.

Pongámonos de acuerdo. Esta sección aparece en el cierre de la secuencia de cada lección. Se conoce también como formalización y conviene revisarla en pares y grupalmente con la supervisión del maestro. Te servirá, junto con **Para tu apunte** como "acordeón" para estudiar.

De vuelta al Explora. En esta sección se retoma la resolución de la situación problemática planteada en el **Explora** para que la confrontes con tus procedimientos y resultados iniciales, como retroalimentación, y reconozcas lo que has aprendido.



Practica. Es una sección con varios problemas para que pongas en práctica lo que has aprendido y domines las técnicas.

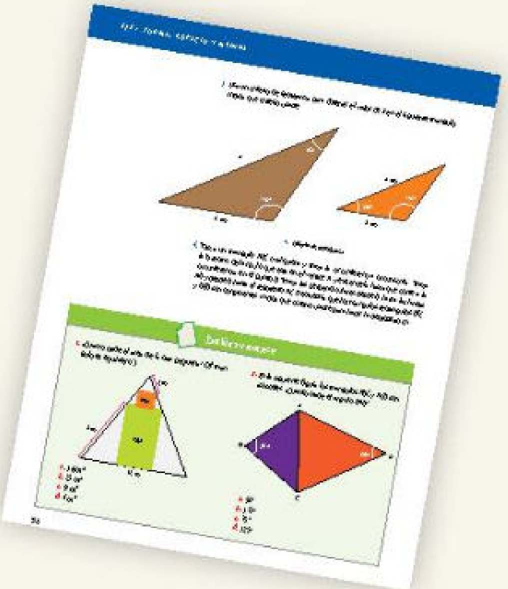
Utiliza las TIC. Sugerencias de cómo puedes aplicar las tecnologías de la información y comunicación en diversos problemas matemáticos. Las encontrarás incluidas en la sección **Practica**.

Te será útil contar con una calculadora y acceso a internet pues a veces requerirás realizar investigación documental y, en muchas ocasiones, reconocer su utilidad en diferentes contextos. En todos los casos es indispensable el auxilio de tu maestro, las páginas fueron consultadas en noviembre de 2013.

Secciones para evaluación

Evalúa tu avance. Es el cierre formal de cada lección. Contiene dos preguntas del tipo de las evaluaciones nacionales que te ayudarán a evaluar tu avance y a que conozcas el formato de dicho examen.

Encontrarás las soluciones en el **Apéndice** del libro.



Evaluemos lo aprendido. En esta sección, que cierra cada bloque, se retoma el contenido del **Engánchate.** Contiene preguntas y actividades del tipo de las evaluaciones nacionales y situaciones problemáticas semejantes a las pruebas internacionales PISA.

Prepárate para enfrentar, con la guía de tu maestro y colaborativamente, esas evaluaciones y asegurar que has alcanzado los aprendizajes en cada bimestre.

Apéndice

Glosario. Incluye los términos matemáticos que aparecen resaltados en **Para tu apunte**. Están organizados por bloque para que puedas encontrarlos fácilmente en el libro, consúltalo, pues es importante para que aprendas a manejar el lenguaje propio de las matemáticas.

Respuestas de las evaluaciones. Para poder evaluar tu avance contrasta tus respuestas de la sección **Evalúa tu avance** con las planteadas aquí.

Bibliografía. Son recomendaciones para ti y para tu maestro con el fin de que puedan consultar distintas publicaciones y referencias utilizadas y citadas.

Referencias de internet. Son direcciones de páginas electrónicas que cubren parte de los contenidos. Además se incluyen **Recomendaciones para navegar en la red**. Todas las páginas fueron consultadas en enero de 2017.

Índice de contenido

Dosificación de contenidos

		SEMANA 1	SEMANA 2	SEMANA 3	SEMANA 4	SEMANA 5	SEMANA 6	SEMANA 7	SEMANA 8
BLOQUE 1	Contenidos	**Lección 1:** • Ecuaciones cuadráticas sencillas	**Lección 2:** • Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos)	**Lección 3:** • Congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada	**Lección 4:** • Representaciones que corresponden a una misma situación	**Lección 5:** • Representación de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas.	**Lección 6:** • Escala de la probabilidad. Eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes	**Lección 7:** • Encuestas, muestreos y herramientas	**Evaluemos lo aprendido:** Evaluación tipo Planea Evaluación tipo PISA
	Competencias a desarrollar en el alumno	Validación de procedimientos y resultados Resolución de problemas de manera autónoma Manejo de técnicas eficientemente	Resolución de problemas de manera autónoma Comunicación de información matemática Validación de procedimientos y resultados	Comunicación de información matemática Resolución de problemas de manera autónoma Comunicación de información matemática	Resolución de problemas de manera autónoma	Resolución de problemas de manera autónoma Comunicación de información matemática	Resolución de problemas de manera autónoma Comunicación de información matemática Manejo de técnicas eficientemente	Comunicación de información matemática Validación de procedimientos y resultados	
BLOQUE 2	Contenidos	**Lección 8:** • Ecuaciones cuadráticas que se resuelven usando la factorización	**Lección 9:** • Rotación y traslación de figuras	**Lección 10:** • Diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras	**Lección 11:** • Relación entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo	**Lección 12:** • Teorema de Pitágoras	**Lección 13:** • Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios	**Evaluemos lo aprendido:** Evaluación tipo Planea Evaluación tipo PISA	
	Competencias a desarrollar en el alumno	Manejo de técnicas eficientemente Resolución de problemas de manera autónoma Validación de procedimientos y resultados	Resolución de problemas de manera autónoma Manejo de técnicas eficientemente	Manejo de técnicas eficientemente Comunicación de información matemática Validación de procedimientos y resultados	Manejo de técnicas eficientemente Resolución de problemas de manera autónoma Validación de procedimientos y resultados	Resolución de problemas de manera autónoma	Resolución de problemas de manera autónoma		
BLOQUE 3	Contenidos	**Lección 14:** • Problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas	**Lección 15:** • Criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas	**Lección 16:** • Problemas geométricos que se solucionan mediante el teorema de Tales	**Lección 17:** • Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas	**Lección 18:** • Gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos	**Lección 19:** • Gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento	**Lección 20:** • Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes	**Evaluemos lo aprendido:** Evaluación tipo Planea Evaluación tipo PISA
	Competencias a desarrollar en el alumno	Resolución de problemas de manera autónoma Manejo de técnicas eficientemente	Resolución de problemas de manera autónoma Manejo de técnicas eficientemente Comunicación de información matemática	Manejo de técnicas eficientemente Resolución de problemas de manera autónoma	Manejo de técnicas eficientemente Resolución de problemas de manera autónoma	Resolución de problemas de manera autónoma Comunicación de información matemática Manejo de técnicas eficientemente	Resolución de problemas de manera autónoma Comunicación de información matemática Manejo de técnicas eficientemente	Manejo de técnicas eficientemente Resolución de problemas de manera autónoma	

Eje: SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO
Eje: FORMA, ESPACIO Y MEDIDA
Eje: MANEJO DE LA INFORMACIÓN

Dosificación de contenidos

Bloque		SEMANA 1	SEMANA 2	SEMANA 3	SEMANA 4	SEMANA 5	SEMANA 6	SEMANA 7	SEMANA 8
BLOQUE 4	Contenidos	**Lección 21:** • Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión	**Lección 22:** • Cuerpos que se generan al girar sobre un eje. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos	**Lección 23:** • Relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente	**Lección 24:** • Relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.	**Lección 25:** • Seno, coseno y tangente	**Lección 26:** • Razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta	**Lección 27:** • Medición de la dispersión de un conjunto de datos	**Evaluemos lo aprendido:** Evaluación tipo Planea Evaluación tipo PISA
BLOQUE 4	Competencias a desarrollar en el alumno	Resolución de problemas de manera autónoma Validación de procedimientos y resultados Comunicación de información matemática Manejo de técnicas eficientemente	Manejo de técnicas eficientemente TIC Resolución de problemas de manera autónoma	Manejo de técnicas eficientemente Resolución de problemas de manera autónoma	Validación de procedimientos y resultados Resolución de problemas de manera autónoma Manejo de técnicas eficientemente	Resolución de problemas de manera autónoma TIC	Manejo de técnicas eficientemente Resolución de problemas de manera autónoma Comunicación de información matemática	Resolución de problemas de manera autónoma Comunicación de información matemática Manejo de técnicas eficientemente	
BLOQUE 5	Contenidos	**Lección 28:** • Problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones	**Lección 29:** • Secciones obtenidas al realizar cortes a un cilindro o un cono recto	**Lección 30:** • Fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos	**Lección 31:** • Cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas	**Lección 32:** • Problemas asociados a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades	**Lección 33:** • Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables	**Evaluemos lo aprendido:** Evaluación tipo Planea Evaluación tipo PISA	
BLOQUE 5	Competencias a desarrollar en el alumno	Resolución de problemas de manera autónoma Comunicación de información matemática Manejo de técnicas eficientemente TIC	TIC Manejo de técnicas eficientemente Comunicación de información matemática	Validación de procedimientos y resultados Resolución de problemas de manera autónoma Comunicación de información matemática	Comunicación de información matemática Manejo de técnicas eficientemente	Resolución de problemas de manera autónoma Comunicación de información matemática Manejo de técnicas eficientemente	Resolución de problemas de manera autónoma Comunicación de información Validación de procedimientos y resultados Manejo de técnicas eficientemente TIC		

Eje: SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO
Eje: FORMA, ESPACIO Y MEDIDA
Eje: MANEJO DE LA INFORMACIÓN

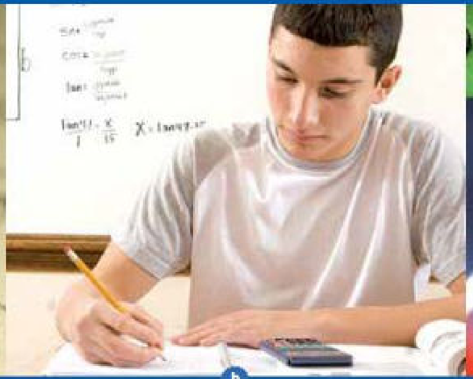
BLOQUE 1

B1

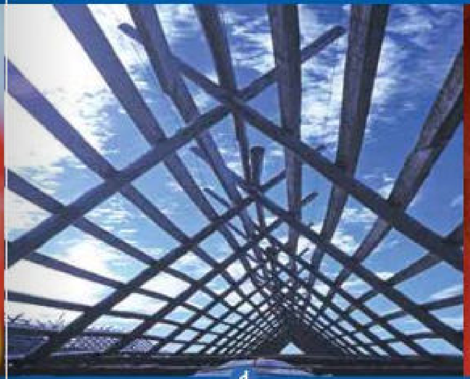
COMPETENCIAS

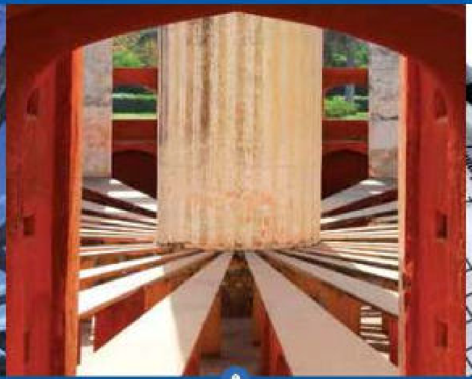
- Resolver problemas de manera autónoma.
- Comunicar información matemática.
- Validar procedimientos y resultados.
- Manejar técnicas eficientemente.

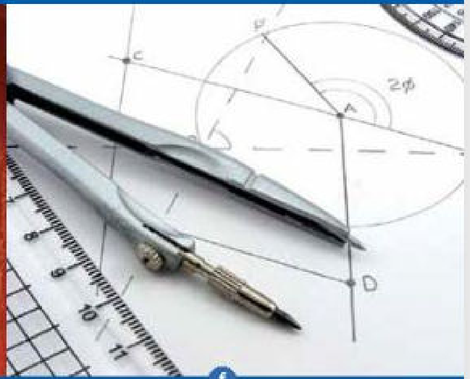

a


b


c


d


e


f

APRENDIZAJES	EJES	SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO	FORMA, ESPACIO Y MEDIDA	MANEJO DE LA INFORMACIÓN
• Explicarás la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.	TEMAS Y LECCIONES	**Patrones y ecuaciones** L1 Resolverás problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.	**Figuras y cuerpos** L2 Construirás figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades.	**Proporcionalidad y funciones** L4 Analizarás representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificarás las que corresponden a una relación de proporcionalidad.
			L3 Explicitarás los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada.	L5 Representarás de forma tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas.
				Nociones de probabilidad L6 Conocerás la escala de la probabilidad. Analizarás las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes.
				Análisis y representación de datos L7 Diseñarás una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discutirás las formas de elegir el muestreo. Obtendrás datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación.

a. Las gráficas nos brindan información resumida de grandes cantidades de datos.
b. Complementar el estudio de las matemáticas con el uso de las TIC potencializa tu aprendizaje.
c. El ábaco es un instrumento que sirve para realizar cálculos aritméticos sencillos.
d. En muchas estructuras encontramos triángulos semejantes.
e. Las matemáticas son aplicadas en diversas áreas como la carpintería y la arquitectura.
f. La regla y el compás son instrumentos de precisión para la realización de trazos geométricos.

Engánchate

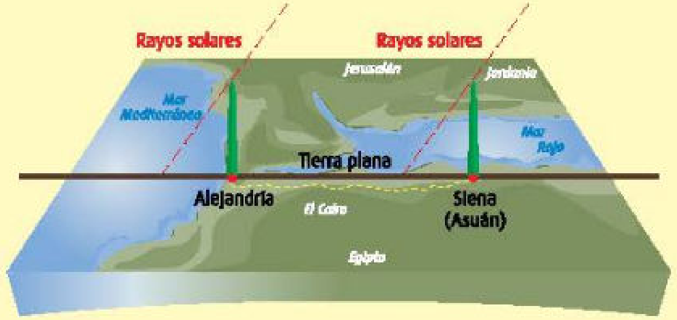
Medición de la circunferencia de la Tierra

Mira a tu alrededor, los techos, los pisos y las paredes son rectos (o casi), sin embargo, tú sabes que la Tierra no es plana, es un cuerpo cercano a una esfera, pero es tan grande que no nos percatamos de su curvatura.

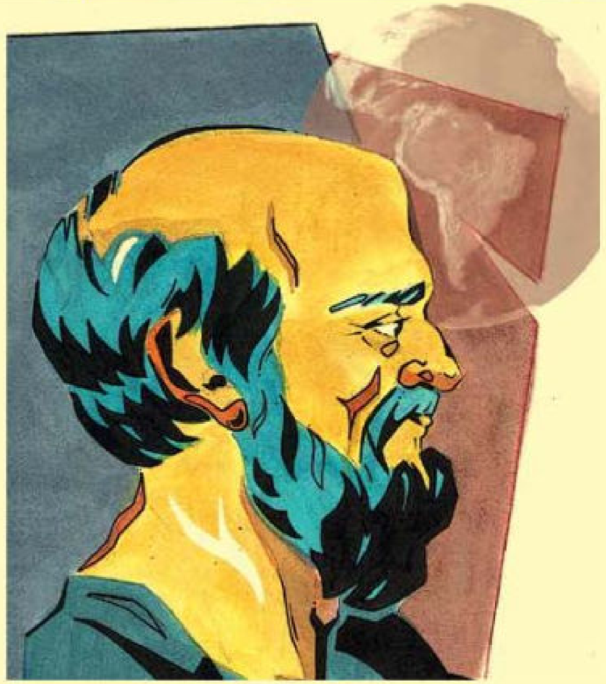
Eratóstenes (276 a.C-194 a.C.) comparó la medida de la sombra de una varilla clavada en el piso en dos lugares lejanos al mismo tiempo. Con esos datos calculó la circunferencia de la Tierra; lo hizo sin reloj, sin GPS, sin mapas exactos, ¿cómo se te ocurre que lo haya hecho?

El razonamiento de Eratóstenes fue parecido al siguiente:

Si la Tierra es plana, la sombra en dos lugares que estén sobre el mismo meridiano debería ser igual a la misma hora. Eratóstenes eligió dos ciudades, Siena y Alejandría, que cumplían con ese requisito.



▲ El meridiano es el círculo máximo de la esfera celeste, que pasa por los polos del mundo y por el cenit y nadir del punto de la Tierra a que se refiere.



▲ Eratóstenes de Cirene hizo importantes contribuciones a la ciencia y la geografía. También escribió el poema *Hermes*, inspirado en la astronomía, así como obras literarias sobre el teatro y sobre la ética.

Sabía que en el solsticio de verano (21 de junio), en su ciudad natal Siena, el Sol pasaba justo por su punto más alto, por lo que, a medio día, una varilla enterrada en la tierra no proyectaba sombra. Ese mismo día, en Alejandría, a la misma hora, midió la sombra proyectada por una varilla y se encontró que sí proyectaba una sombra. Midió su ángulo y al conocer la distancia entre ambas ciudades pudo calcular la circunferencia terrestre. Su medida (~40 000 km) es muy parecida al valor que usamos actualmente: 39 941 km.

Al final del bloque encontrarás el método explicado con más detalle.

Lee más...

Acerca de Eratóstenes:

http://paginas.matem.unam.mx/cprieto/biografias-de-matematicos-a-e/197-eratostenes

Libros del rincón: Fierro, Julieta, *La tierra y el universo*, México, SEP, Santillana, 2002.

Patrones y ecuaciones

Lección 1

Resolverás problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas

Explora

La carcasa

Con el fin de construir una carcasa para un nuevo aparato los diseñadores industriales calculan cada detalle del modelo para después fabricarlo.

La carcasa es la cubierta externa que protege las partes internas del aparato. Esta tiene forma rectangular.

Se sabe que para construir la carcasa de este juego electrónico en particular se debe respetar que el largo sea cinco veces mayor que el ancho. También se sabe que el área total de la carcasa es de 66 cm^2.

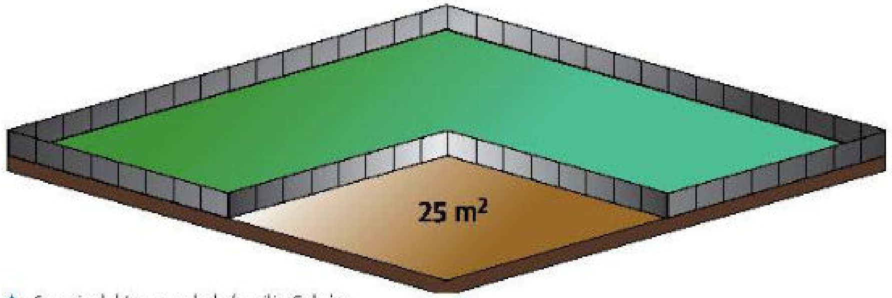
- ¿Cuánto mide el ancho?
- ¿Cuánto mide el largo?
- ¿Cuánto mide el perímetro?

Explora cuáles son las posibles soluciones de este problema.

Descubre y construye

• El terreno de la familia Galván

En la comunidad de Huajuapan de León la familia Galván quiere construir una barda alrededor de un terreno cuadrado. Para presupuestar la construcción de la barda, la ingeniera encargada le pregunta a la familia cuáles son las medidas en metros cuadrados del terreno. La familia sólo sabe que si le quitan 25 metros cuadrados al terreno le quedan 96 metros cuadrados.



Croquis del terreno de la familia Galván.

- ¿Cuánto mide el área del terreno completo?
- Si todo el terreno es cuadrado, ¿qué operación tienes que hacer para calcular la longitud de la barda?
- ¿Cuánto mide cada lado del terreno completo?

1. Escribe una ecuación que permita calcular el valor de un lado y resuélvela.
   - ¿Cuánto mide el perímetro del terreno completo?
2. Compara las respuestas con un compañero y decidan entre los dos cuáles son las correctas.
3. Después de su acuerdo, hagan una lista de los pasos que siguieron para resolver este problema.

Para tu apunte

Una **ecuación de segundo grado** es aquella donde la variable se encuentra elevada a la segunda potencia.

• Los Galván incrementan su patrimonio

Esta vez, la familia Galván quiere comprar un terreno rectangular cuyo largo mide el cuádruple del ancho y tiene un área de 576 metros cuadrados. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno?

1. Para encontrar la solución responde:
   - ¿Cómo calculas el área del terreno?
2. Compara tu respuesta con la de algún compañero, ¿fue la misma?
   - ¿Para qué dimensiones del terreno su área da como resultado 576 m^2? ¿Puedes mencionar más de una respuesta?

3. Completa la siguiente tabla con distintos resultados posibles:

Largo	Ancho	Área
1	576	576 m^2
		576 m^2
		576 m^2
		576 m^2
		576 m^2
		576 m^2

4. ¿Cuál de estas posibles respuestas cumple con que el largo sea el cuádruple del ancho?
5. Analiza la siguiente expresión. La escritura formal del problema es:

$$\underset{\text{Largo}}{\underset{\uparrow}{(4x)}}\ \underset{\text{Ancho}}{\underset{\uparrow}{(x)}} = 576 \leftarrow \text{Área}$$

- ¿Puedes encontrar otra expresión?

• Un ruedo para el negocio

Ahora la familia Galván quiere construir un ruedo circular dentro de alguno de sus terrenos y necesita hacer algunas pruebas.

1. Responde:
   - ¿Cuál es la fórmula para obtener el área del ruedo? ____________
   - ¿Cuál es la variable que está elevada a la segunda potencia? ____________
   - ¿Qué tipo de ecuación es? ____________
2. Resuelve con esa ecuación los siguientes problemas. Incluye una descripción detallada del procedimiento de resolución:
   - ¿Cuánto mide el área de un círculo con radio de 5 m?

   Procedimiento: ____________
   - ¿Cuánto mide el radio de un círculo cuya área es de 156.86 m^2?

   Procedimiento: ____________
3. Un ruedo debe medir, al menos, 4 metros de diámetro, el área para los espectadores se calcula para tres filas, un total de 2.4 metros adicionales. Explica, a la familia Galván, en cuál de sus dos terrenos es más conveniente construir el ruedo.

Pongámonos de acuerdo

1. Resuelvan el siguiente problema escribiendo una expresión algebraica:
   - Si el doble de un número al cuadrado es igual a 50, ¿cuál es el número?
2. Junto con su maestro comparen la expresión que escribieron y decidan cuál conviene usar para resolver el problema.
3. Una vez resuelta la ecuación, expliquen cómo llegaron a la solución. ¿Hay más de una solución?
4. Lean la sección Para tu apunte y digan cuánto vale a, b y c en cada una.
5. Describan el método para resolver estas ecuaciones y el tipo de soluciones que se encuentran.

Para tu apunte

Una ecuación de **segundo grado** o **ecuación cuadrática** tiene la siguiente forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde el coeficiente a (el número que multiplica a x^2) tiene que ser necesariamente diferente de cero.

Si el coeficiente a fuera 0, entonces no sería una ecuación de segundo grado, sino una ecuación de primer grado de la forma $ax + b = 0$.

De vuelta al Explora

En el problema del nuevo aparato, los datos se refieren a características del ancho y del largo. Anota estas características, y con todo lo visto en la lección, resuelve el problema. Verifica si usaste estas expresiones algebraicas para resolver el problema y comunica a tu maestro tus resultados y procedimientos.

▲ Las carcasas, como las de las calculadoras que utilizan en clase, son fabricadas normalmente de plástico porque es un material resistente y a la vez ligero.

Para tu apunte

Las ecuaciones de segundo grado tienen una o dos soluciones. Por ejemplo, $x^2 = 25$ implica encontrar un número que elevado al cuadrado sea 25. Éste puede ser 5 o −5, ya que tanto $5^2 = 25$ como $(-5)^2 = 25$.

Un ejemplo en el que sólo se tiene una solución es en la ecuación $x^2 = 0$.

Practica

1. Resuelve las siguientes expresiones algebraicas:
   a. $3x^2 = 192$
   b. $x^2 - 16 = 0$
   c. $x(x + 1) = 0$
2. Encuentra un número que restándole 6, a su cuadrado, sea 3 unidades.
3. El perímetro del jardín rectangular de la señora Balderas mide 100 metros. Si el largo es 1.5 veces más grande que el ancho, ¿cuáles son las dimensiones del jardín?, ¿con qué ecuación se resuelve? ¿Qué tipo de solución obtuviste?
4. Un número entero positivo es menor que el doble de otro y la suma del cuadrado de cada número es 244. ¿Cuál es dicho número? ¿Es única la solución?
5. Reunidos en equipo busquen en internet la biografía del matemático Abu Abdallah Muhammad ibn Musa al-Jwarizmi (mejor conocido como al-Juarismi). Analicen en qué consiste su método para resolver ecuaciones cuadráticas. Discutan con sus compañeros y el maestro la manera en que obtiene los resultados de la ecuación cuadrática.
   - $4x^2 + x + 3 = 0$. Encuentren las soluciones según el método investigado.

Evalúa tu avance

1. Encuentra dos números consecutivos cuyo producto es 12.
   - ¿Cuál de las siguientes expresiones algebraicas se usa para resolver el problema del enunciado anterior?
     a. $x(x + 2) = 12$
     b. $x^2 + x = 12$
     c. $x^2 + 2x = 12$
     d. $2x + x = 12$
2. Se sabe que tres veces el cuadrado de la longitud de un lápiz es igual al área de una cartulina de 192 cm^2.
   - ¿Cuál es la longitud del lápiz?
     a. 7
     b. 8
     c. 9
     d. 10

Figuras y cuerpos

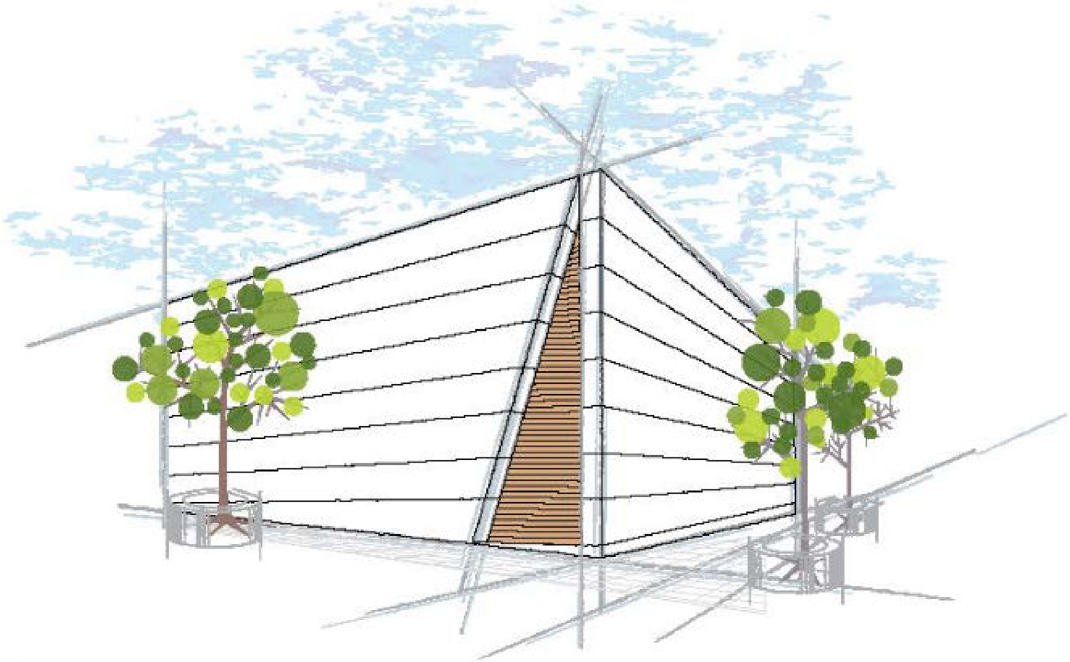
Lección 2 Construirás figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y analizarás sus propiedades

Explora

El diseño arquitectónico

Las matemáticas son indispensables en el oficio de la construcción. Aún sin saber matemáticas formales, los trabajadores pueden hacer cálculos y estimaciones bastante exactas. Veamos el siguiente problema.

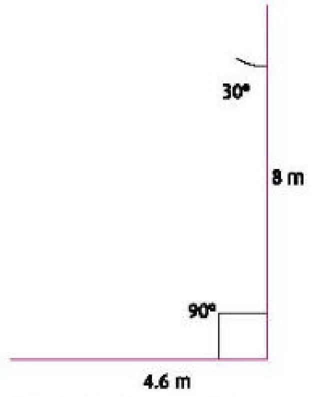
Durante la construcción de un edificio había que construir dos grandes placas de madera con forma de triángulo rectángulo. El arquitecto les dio a los carpinteros dos instrucciones diferentes para cada triángulo:



▲ Triángulo rectángulo formado por paneles de madera en la fachada de la construcción.

El primer triángulo de madera debe tener 8 metros de altura, la hipotenusa debe ser de 9.2 metros y el ángulo entre estos dos lados de 30°.

El segundo triángulo también tendrá 8 metros de altura, la base será de 4.6 metros y los ángulos adyacentes a la altura medirán 90° y 30°, como se muestra en la figura:



▲ Medidas para el triángulo rectángulo.

Ante la orden del arquitecto un carpintero exclamó:

—¡Qué va!, esos dos triángulos son exactamente iguales. Basta con hacer uno y copiarlo.

- ¿Estás de acuerdo con esta afirmación?
- ¿En qué se basó el carpintero para hacerla?

Descubre y construye

1. Forma con tus compañeros un equipo de tres personas. Cada uno trace en su cuaderno, sin ver el trabajo de los otros, un triángulo que tenga las medidas que se especifican más abajo. Usen sus escuadras y su transportador para hacer el trazo. Pueden ver los triángulos de los demás cuando los terminen.

   Ángulo 1: 50°

   Ángulo 2: 70°

2. Ahora compara tu triángulo con los de tus compañeros.
   - ¿El ángulo restante mide lo mismo que el de los triángulos de tus compañeros? ¿Por qué?
   - ¿Son todos los triángulos de igual tamaño?
   - ¿Todos los triángulos tienen la misma forma?
   - ¿Qué información se necesita para saber que dos triángulos tienen la misma forma pero diferente tamaño?

- Si dos triángulos tienen la misma área, ¿pueden tener la misma forma, pero diferente tamaño? Da un ejemplo o un contraejemplo.
- Si dos triángulos tienen el mismo perímetro, ¿pueden tener la misma forma, pero diferente tamaño? Da un ejemplo o un contraejemplo.

3. Ahora tracen con el mismo equipo dos triángulos siguiendo las instrucciones planteadas:

Triángulo 1	Triángulo 2
Un lado de 8 cm	Un ángulo de 60°
Un lado de 6 cm	Un ángulo de 30°
El ángulo entre los lados de 90°	El lado entre ellos de 10 cm

- ¿Los triángulos 1 y 2 son del mismo tamaño?
- ¿Tienen la misma forma?
- ¿Cuál es la información mínima que necesitas para saber que dos triángulos son iguales en forma y tamaño?

Para tu apunte

A las figuras que tienen la misma forma pero tamaño diferente se les llama **semejantes**. Estas figuras tienen ángulos iguales y sus lados proporcionales.

Para tu apunte

Se dice que dos figuras que tienen la misma forma e igual tamaño son **congruentes** entre sí. Estas figuras tienen ángulos iguales y lados iguales.

• Las constantes

1. Dibuja en tu cuaderno dos triángulos de diferente tamaño pero cuyos ángulos sean iguales a los del otro. Los tres lados deben ser distintos en cada triángulo. Nombra los vértices del primer triángulo que dibujes con las letras *ABC* y a los del segundo con *A′B′C′*, de forma que *A* y *A′* midan los mismo, y así para los demás.

2. Responde lo siguiente:

   ⇒ Usando una regla mide el lado $\overline{AB}$.

   ⇒ También mide el lado $\overline{A'B'}$.

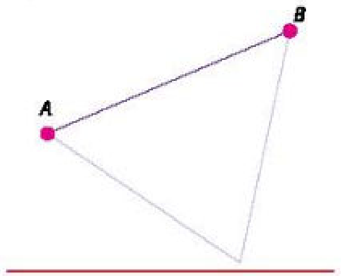
   - ¿Cuál es el resultado de dividir $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$?
   - ¿Cuál es la medida del lado $\overline{AC}$?
   - ¿Cuál es la medida del lado $\overline{A'C'}$?
   - ¿Cuál es el resultdo de dividir $\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$?

   Predice el resultado de la división de los lados $\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$ y justifica tu predicción.

3. Construye dos triángulos semejantes de tal manera que la razón de semejanza sea $\frac{1}{2}$.

Para tu apunte

Los lados de los triángulos son **segmentos de recta**. Para referirnos a un segmento de recta se nombran los extremos de éste con letras y se escriben esas dos letras juntas con una línea encima, como se muestra en la figura. El segmento de recta se escribe $\overline{AB}$.



Para tu apunte

Cuando se tienen **dos figuras semejantes**, la razón entre cualesquiera dos lados correspondientes (por ejemplo, $\frac{AB}{A'B'}$) es la misma para las demás parejas de lados; es decir, la razón es constante, por lo que los lados correspondientes de ambos triángulos son proporcionales.

Entre cualesquiera dos triángulos semejantes se encuentra una regularidad al dividir los lados correspondientes.

4. Describe el método que utilizaste para construir los dos triángulos.
5. Conociendo solamente la razón de semejanza entre dos triángulos, responde:
   - ¿Podrías dibujar dos triángulos que fueran semejantes?
   - ¿Qué datos necesitarías además de la razón de semejanza para construir dos triángulos semejantes?

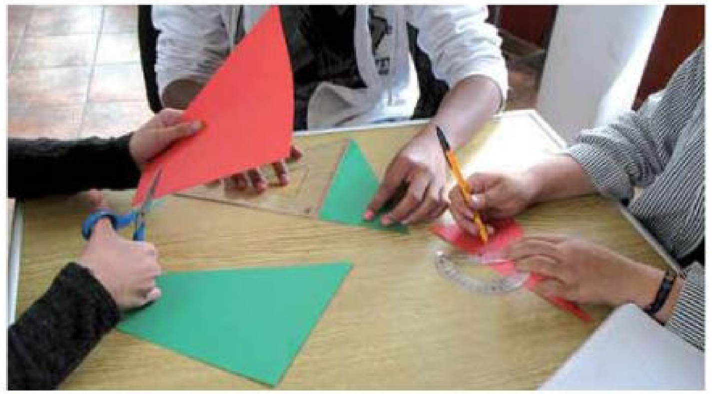
Pongámonos de acuerdo

Se sabe que a cierta hora del día un poste de luz de 4.5 metros de altura crea una sombra de 0.9 metros. A la misma hora del día el edificio contiguo, de altura desconocida, produce una sombra de 6.5 metros. ¿Cuál es la altura del edificio?

1. Discute el problema con el grupo y, utilizando triángulos, tracen un dibujo que represente la situación planteada.
2. Discutan grupalmente cómo pueden calcular la altura del edificio. Recuerden que el ángulo que se forma desde un punto en el suelo al Sol (ángulo de elevación), a cierta hora del día, es constante para dos objetos cercanos.
3. Hagan el cálculo y discutan si tiene sentido o no el resultado.
4. Expongan las diferentes formas que encontraron para resolver el problema y discutan las ventajas y desventajas de cada una. Escriban cuáles criterios de semejanza y de congruencia utilizaron.

De vuelta al Explora

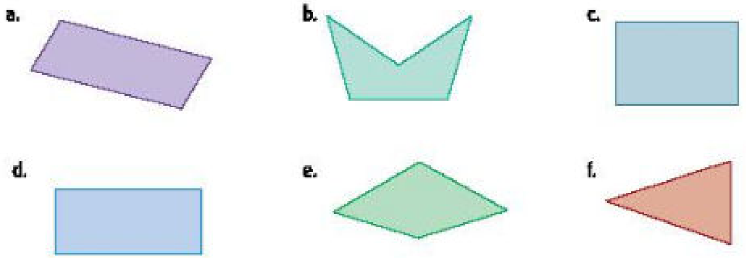
Una forma de comprobar lo que el carpintero dijo acerca de las placas de madera es construir triángulos semejantes (más pequeños) a los referidos originalmente (por ejemplo sustituyendo los metros por centímetros), recortarlos y sobreponerlos.



▲ Puedes utilizar cartulina de dos colores para construir los triángulos y sobreponerlos.

Practica

1. Observa las siguientes figuras y divídelas, con un solo trazo, en dos triángulos congruentes.



▲ Figuras que pueden ser construidas con triángulos congruentes.

- ¿Cuáles figuras lograste dividir en dos triángulos exactamente iguales?
- ¿Cómo supiste que son exactamente iguales tanto los lados como los ángulos?
- ¿Hubo alguna figura que no pudieras dividir en dos triángulos iguales?

2. Traza tres triángulos semejantes con la característica de tener un ángulo de 30° y otro de 45°.
3. Si se tienen dos triángulos rectángulos semejantes, uno con base de 6 cm y altura de 5 cm (con un ángulo de 90° entre estos dos lados), ¿cuánto medirá la altura del otro triángulo semejante con base de 270 cm?
4. Amador observa los planos de su nueva casa, los cuales no tienen indicadas las medidas. Él sólo recuerda que el ancho de la casa es de 8 metros, así que toma una cinta métrica y mide las longitudes que tiene el rectángulo dibujado en los planos. Si éste mide 24 cm de ancho y 54 cm de largo, ¿cuál es el largo real de la casa?

Evalúa tu avance

1. En la clase del maestro Alonso, un alumno le hizo la siguiente pregunta: Cuando comparamos dos cuadrados de cualquier tamaño, ¿serán siempre semejantes entre sí?
   - ¿Cuál de las siguientes respuestas es la correcta?:
     a. Sí son semejantes pero no siempre congruentes.
     b. Sí son semejantes y también congruentes.
     c. No son semejantes pero sí congruentes.
     d. No son semejantes y tampoco congruentes.
2. Si el triángulo *ABC* es congruente con el triángulo *DEF*, ¿cuál de los siguientes enunciado es falso?
   a. El ángulo *BCA* es congruente al ángulo *EFD*.
   b. El ángulo *CBA* es congruente al ángulo *FDE*.
   c. El ángulo *ACB* es congruente al ángulo *DFE*.
   d. El ángulo *CAB* es congruente al ángulo *FDE*.

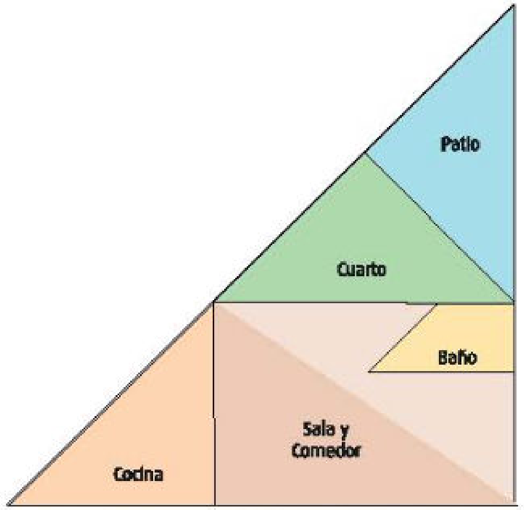
Figuras y cuerpos

Lección 3 Explicitarás los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada

Explora

El diseño modernista

La arquitecta Adriana ha decidido construir un edificio de departamentos con base en el siguiente croquis trazado en centímetros:



▲ Croquis inicial de zonificación de espacios que tendrá el departamento.

▲ Plano final del departamento a escala 1:200.

1. Responde:
   - ¿Cuáles son las medidas reales del departamento?
2. Discute con un compañero cómo resolverán el problema. Escriban qué saben y qué no y también cómo pueden conocer los datos que faltan.

Descubre y construye

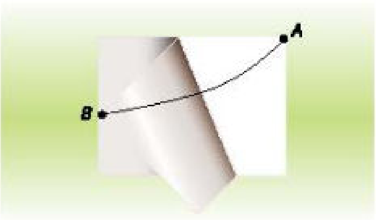
• Instrucciones por teléfono

Si tuvieras que darle instrucciones a alguien por teléfono para que trace un triángulo como el que deseas: ¿qué información le darías si sólo puedes darle a lo más tres datos?

1. Reúnete con un compañero. Uno de ustedes dibuje un triángulo cualquiera y mida sus dimensiones con regla y transportador. Después, quien dibujó el triángulo le debe dar a su compañero sólo tres datos con la intención de que lo dibuje exactamente igual.
2. Después de hacer esto, verifiquen si los triángulos son iguales.
3. Anoten las instrucciones indicando las características del triángulo que dibujaron.
4. Junto con tu maestro y el grupo, decidan cuáles son los criterios para que dos triángulos sean congruentes y escríbelos en tu cuaderno.

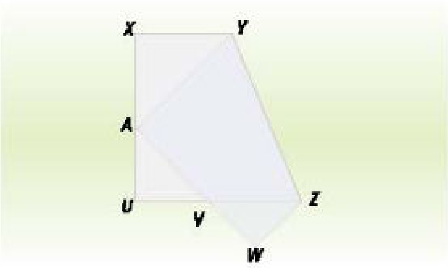
• Un resultado increíble

1. Toma una hoja en blanco y dóblala como se muestra a continuación, llevando el punto *A* al punto *B* (cualquier punto del lado menor) y marca el doblez:



▲ Esquema de la hoja en blanco con los puntos que indican el doblez.

2. Después de ponerle letras a los vértices que se forman, como se muestra en la figura, responde las preguntas de la siguiente página.



▲ Hoja doblada con vértices indicados.

Para tu apunte

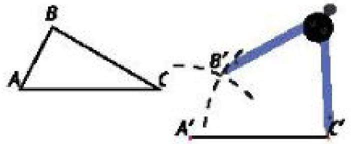
Dos triángulos **congruentes** son exactamente iguales salvo movimientos en el plano (desplazar, girar y reflexión).

Para tu apunte

Para trazar un **triángulo congruente** usando regla y compás:

Dado cualquier triángulo con vértices ABC podemos copiarlo en otro lugar siguiendo estos pasos:

1. Trazamos una línea recta en el lugar donde se desea hacer el triángulo congruente, y sobre ella se marca un punto: *A'*.
2. Sobre el triángulo *ABC*, abrimos el compás del vértice *A* al *C*, y sin mover esa distancia, llevamos al punto *A'* de la línea que dibujamos en el inciso anterior y marcamos la distancia establecida del compás. A esta marca le llamamos *C'*.
3. Nuevamente sobre el triángulo *ABC*, abrimos el compás del vértice *A* al *B*, y sin moverlo, colocamos el compás sobre *A'* y trazamos un arco.
4. Regresamos al triángulo *ABC*, abrimos el compás del vértice *C* al *B*, y sin moverlo, colocamos el compás sobre *C'* y trazamos un arco que cruce con el arco anterior. A esa intersección le llamamos *B'*.
5. Por último, unimos los puntos *A'*, *B'* y *C'*.



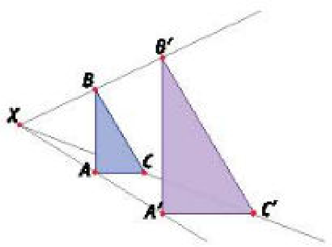
Nota: Este trazo fue hecho considerando la longitud de los lados del triángulo *ABC*. Para conocer otros trazos para la construcción de triángulos congruentes, visita el sitio:

http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2002/geometria_triangulo/contenido.htm

Para tu apunte

Para trazar un **triángulo semejante**:

Dado cualquier triángulo con vértices *ABC* podemos crear uno semejante en otro lugar siguiendo estos pasos:



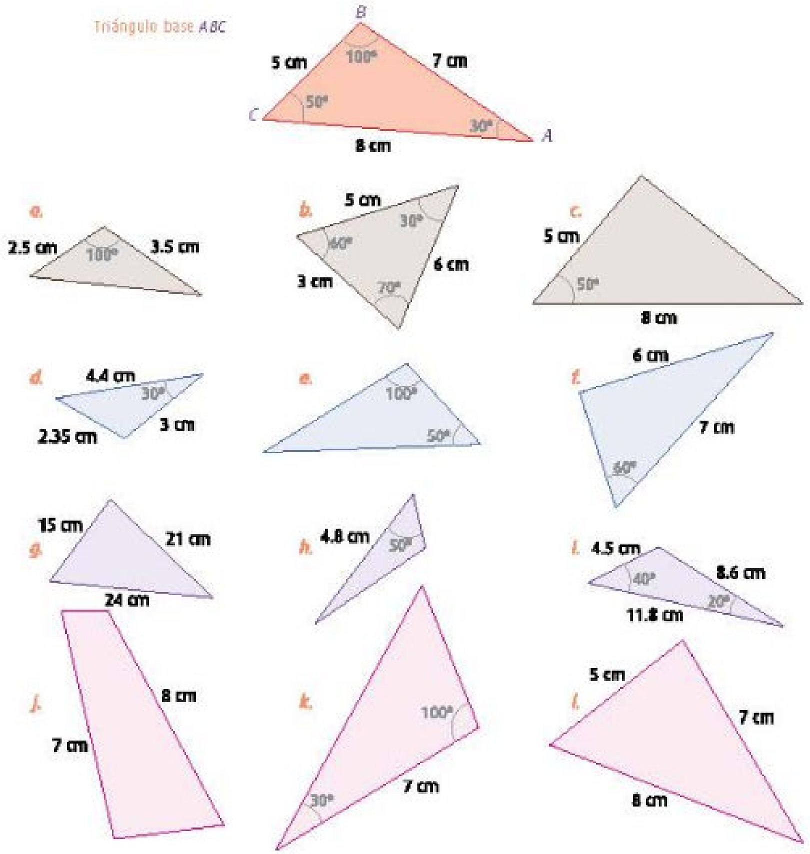
1. Elegimos un punto cualquiera fuera del triángulo *ABC* y lo denominamos *X*.
2. Unimos con una recta cada uno de los vértices con el punto *X*, formando las rectas *AX*, *BX* y *CX*.
3. Trasladamos los puntos *A*, *B* y *C* sobre las correspondientes líneas *AX*, *BX* y *CX*, para formar los nuevos puntos *A′*, *B′* y *C′*.
4. Los segmentos *AB* deben ser paralelos a los segmentos *A′B′*, los *AC* a los *A′C′*, y *BC* a los *B′C′*.
5. Por último, unimos los puntos *A′*, *B′* y *C′* para formar un triángulo semejante a *ABC*.

- Localiza los triángulos *XYA*, *AVU* y *VZW*.
- Mide sus ángulos con un transportador.
- Compara los ángulos de los triángulos, ¿encuentras alguna regularidad?
- ¿Qué tipos de triángulos son?
- Mide cada lado de los triángulos *XYA* y *AVU*.
- Si comparas los lados correspondientes de los triángulos, ¿qué propiedad cumplen? ¿Encuentras alguna regularidad?
- ¿Son semejantes los triángulos *XYA* y *AVU*? ¿Por qué?

3. Junto con tu maestro y el grupo, determinen cuáles son los criterios para que dos triángulos sean semejantes y escríbelos en tu cuaderno.

Pongámonos de acuerdo

1. Organizados en parejas digan cuál o cuáles de los triángulos que se muestran a continuación son semejantes y cuáles son congruentes al triángulo base *ABC*.



2. Anoten cuáles triángulos son congruentes al triángulo base: __________
3. Escriban en su cuaderno las razones por las que cada uno de los triángulos que eligieron es congruente al triángulo base.
4. Anoten cuáles triángulos son semejantes al triángulo base: __________ __________.
5. Escriban en su cuaderno las razones por las que cada uno de los triángulos que eligieron es semejante al triángulo base.
   - ¿Qué triángulos no son congruentes ni semejantes al triángulo base? __________ __________. Expliquen por qué en cada caso y den contraejemplos.
   - Para decidir si dos triángulos son congruentes, ¿bastaría con que coincidan dos parejas de lados? ¿Por qué?
   - Para decidir si dos triángulos son congruentes, ¿bastaría con que dos parejas de ángulos fueran iguales? ¿Por qué?
   - Para decidir si dos triángulos son semejantes, ¿bastaría que al comparar dos parejas de ángulos fueran iguales? ¿Por qué?
   - Para decidir si dos triángulos son semejantes, ¿bastaría con mostrar que dos parejas de lados son proporcionales? ¿Por qué?

De vuelta al Explora

Para poder conocer cuánto medirá en escala 1:1 el departamento de Adriana, mide con una regla cada pared del croquis, y a continuación responde:

- ¿Qué relación tienen el triángulo del croquis y el triángulo del plano del departamento real?
- ¿Qué relación tendrían los lados del triángulo en el croquis y el triángulo en el plano del departamento real?
- ¿Qué significa la escala 1:200?
- ¿Cuáles serían las dimensiones reales del dormitorio?
- ¿Cuáles serían las dimensiones reales de la cocina?
- ¿Cómo obtuviste las dimensiones anteriores?

Practica

1. Traza las diagonales de un romboide *ABCD* y demuestra que se forman dos pares de triángulos congruentes. Mide cada uno de sus lados y determina los ángulos y lados correspondientes de cada par de triángulos.
2. Dado un triángulo cualquiera, toma los puntos medios de cada uno de sus lados y traza con ellos un nuevo triángulo inscrito en el primero. Demuestra que el triángulo exterior y el inscrito son semejantes. Da un argumento que apoye tu demostración.

Para tu apunte

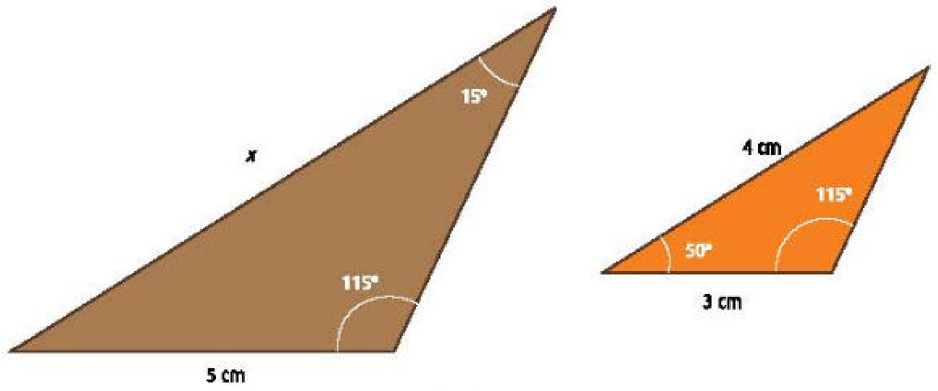
Las condiciones mínimas que deben cumplir dos triángulos para que sean congruentes son las siguientes (L = lado y A = ángulo):

- Criterio LLL: Que los tres lados de los dos triángulos sean congruentes.
- Criterio LAL: Que dos lados sean congruentes y el ángulo entre ellos mida lo mismo en ambos triángulos.
- Criterio ALA: Que dos ángulos midan lo mismo en ambos triángulos y el lado comprendido entre dichos ángulos sea congruente en ambos triángulos.

Las condiciones mínimas que deben cumplir dos triángulos para que sean semejantes son las siguientes:

- Criterio LLL: Que los tres lados de los dos triángulos sean proporcionales.
- Criterio LAL: Que dos lados sean proporcionales y el ángulo entre ellos mida lo mismo en ambos triángulos.
- Criterio AA: Que dos ángulos midan lo mismo en ambos triángulos.

3. Usa un criterio de semejanza para obtener el valor de x en el siguiente triángulo. Indica qué criterio usaste.

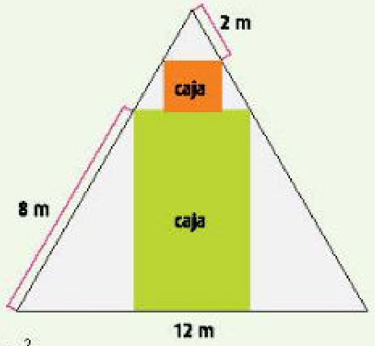


▲ Criterio de semejanza.

4. Traza un triángulo ABC cualquiera y traza la circunferencia circunscrita. Traza la bisectriz del ángulo que está en el vértice A y extiéndela hasta que corte a la circunferencia en el punto D. Traza las perpendiculares desde D hasta las líneas AB y desde D hasta el segmento AC y nombra los puntos correspondientes F y E. Demuestra que los triángulos rectángulos DFC y DEB son congruentes. Indica qué criterio usaste para hacer la demostración.

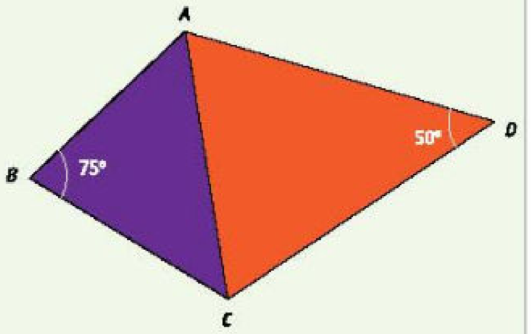
Evalúa tu avance

1. ¿Cuánto mide el área de la caja pequeña? (El triángulo es equilátero.)



a. 16 m^2
b. 25 m^2
c. 9 m^2
d. 4 m^2

2. En la siguiente figura los triángulos ABC y ACD son isósceles. ¿Cuánto mide el ángulo BAD?



a. 50°
b. 175°
c. 75°
d. 125°

Proporcionalidad y funciones

Lección 4

Analizarás representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificarás aquellas que corresponden a una relación de proporcionalidad

Explora

Cuál con cuál

1. Observa y analiza las siguientes tablas, gráficas y ecuaciones.

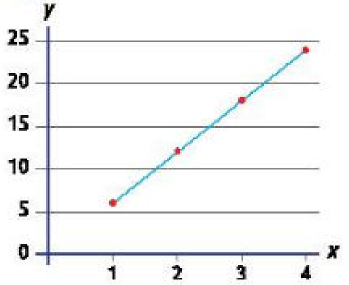
I

Edad de Roberto	Edad de Hilda
1	6
2	7
3	8
4	9

II

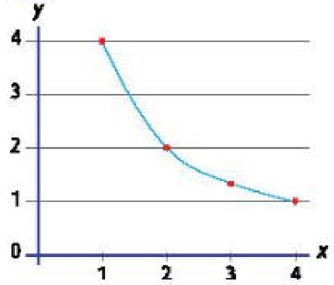
Tazas de harina	Número de hot cakes
1	6
2	12
3	18
4	24

a



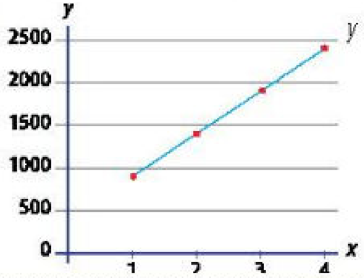
$y = 4.9x^2$ 1

b



$y = x + 5$ 2

c

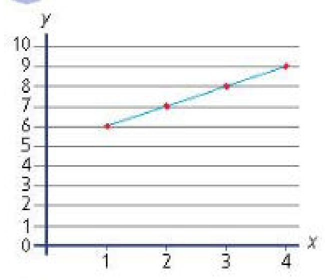


$y = 4/x$ 3

III

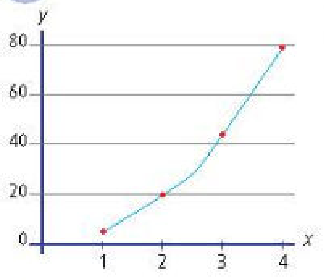
Tiempo en segundos	Distancia recorrida
1	4.9
2	19.6
3	44.1
4	78.4

d



$y = 6x$ 4

e



$y = 500x + 400$ 5

IV

Días	Costo de renta de auto
1	900
2	1400
3	1900
4	2400

V

Trabajadores	Días en recolectar cosecha
1	4
2	2
3	1.333
4	1

2. Llena el siguiente cuadro para mostrar qué tabla, gráfica y ecuación representan la misma situación.

Tabla	Gráfica	Ecuación
I		
II		
III		
IV		
V		

3. ¿Cuál(es) tabla(s), gráfica(s) y ecuación(es) corresponden a una relación de proporcionalidad?

Descubre y construye

• El taller de costura

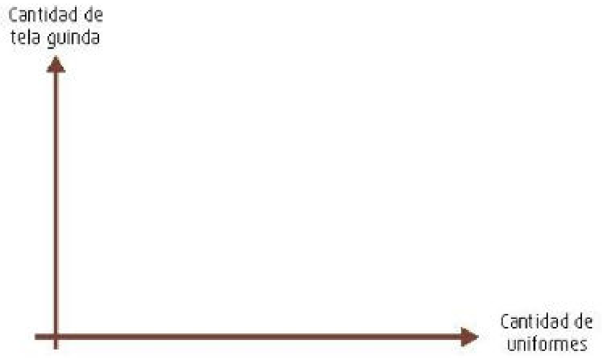
La señora María realizó tres uniformes de la misma talla para unas alumnas de tercer grado. Empleó 7.5 metros de tela guinda, 3 metros de tela blanca y $1\frac{1}{2}$ carretes de hilo.

1. Responde:
   - ¿Cuánto material necesitará María para hacer la siguiente cantidad de uniformes de la misma talla? Completa la tabla.

Número de uniformes	Metros de tela guinda	Metros de tela blanca	Carretes de hilos
3	7.5	3	1.5
6			
9	22.5		
12			6
20			

- Considerando la cantidad de uniformes y la cantidad de tela guinda que se requiere para realizarlos, ¿podrías decir que esas cantidades cumplen una relación de proporcionalidad directa? __________
- ¿Por qué?

2. Representa de forma gráfica la cantidad de metros de tela guinda respecto a la cantidad de uniformes realizados.



▲ Gráfica de tela guinda y cantidad de uniformes.

- ¿Qué tipo de gráfica obtuviste?
- ¿Cómo calculaste la cantidad de material necesario para hacer 20 uniformes?
- ¿Cuántos metros de tela guinda se necesitan por cada uniforme?
- ¿Cuántos metros de tela blanca se necesitan por cada uniforme?
- ¿Cuántos carretes de hilo se necesitan por cada uniforme?

3. Escribe una ecuación que describa la cantidad de metros de tela guinda necesaria para realizar una cantidad determinada de uniformes.
4. Escribe una ecuación que describa la cantidad de carretes de hilo necesarios para realizar una cantidad determinada de uniformes.

• Viajar en taxi

El costo en pesos de un taxi está representado mediante la siguiente ecuación: $y = 10 + 8x$, donde x representa el número de kilómetros recorridos y y es el costo total por el viaje.

Para tu apunte

Al realizar un gráfica debes considerar:

1. Marcar los ejes coordenados, puedes usar flechas.
2. Rotular cada eje con la magnitud de la variable correspondiente.
3. Establecer una escala constante en cada eje.
4. Ubicar los puntos que conforman la gráfica.
5. Unir los puntos con un trazo.

Para tu apunte

Las **relaciones de proporcionalidad directa** $y = kx$ se representan gráficamente por una línea recta que pasa por el origen.

Se llama **constante de proporcionalidad** k a aquella magnitud que describe el aumento de cantidades iguales de una magnitud y con respecto al aumento unitario de otra magnitud x, en una relación del tipo $y = kx$. Por ejemplo, 2.5 metros es la **constante de proporcionalidad** que describe la cantidad de tela guinda necesaria por cada uniforme realizado.

1. Completa los costos en la siguiente tabla y traza la gráfica correspondiente:

Kilómetros recorridos	Costo del viaje
2	
4	
6	
8	
10	

▲ Kilómetros recorridos y costo del viaje.

Para tu apunte

Las relaciones del tipo $y = ax + b$, con b diferente de cero, se llaman **relaciones afines** y, a diferencia de las relaciones de proporcionalidad éstas no pasan por el origen.

- ¿Es ésta una relación de proporcionalidad? _______ ¿Por qué? _______. Comenta con tus compañeros y maestro.
- ¿Cómo es la gráfica de esta relación?
- ¿Qué diferencia hay con la gráfica del problema anterior?
- ¿La gráfica de esta relación pasa por el origen?
- ¿Qué representan el 10 y el 8 de la ecuación del costo del taxi? Coméntalo con tus compañeros y maestro.

Pongámonos de acuerdo

1. Organizados en parejas, en las siguientes tablas de valores identifiquen cuáles situaciones se representan por medio de una relación de proporcionalidad.

a.

Días trabajados	Pesos ganados
7	1 400
14	2 800
21	4 200
28	5 600

b.

Número de personas en un elevador	Masa total en kilogramos
1	80
2	133
3	198
4	225

c.

Reactivos correctos en un examen	Calificación en el examen
13	52
16	64
21	84
25	100

d.

Cantidad de dólares	Cantidad de pesos
4	52
10	130
13	169
23	299

e.

Número de galletas en un horno	Tiempo de cocción en minutos
1	30
2	30
3	30
4	30

f.

Piezas de tortillas	Kilogramos de tortillas
40	1
120	3
160	4
320	8

- ¿Cuáles situaciones no establecen una relación de proporcionalidad?, expliquen.

2. Comparen y comenten si hay diferencias.
3. Escriban las expresiones algebraicas para las relaciones de proporcionalidad.
4. Tracen las gráficas para las relaciones de proporcionalidad.
5. Revisen con su maestro las características para una relación de proporcionalidad.

Para tu apunte

Las **relaciones de proporcionalidad** directa:

- Están representadas algebraicamente por la ecuación $y = kx$, donde y representa la variable dependiente, x la variable independiente, y k la constante de proporcionalidad.
- Se representan gráficamente por una línea recta que pasa por el origen.
- La variación de aumento o decremento de la variable dependiente y es la misma siempre que se aumente o disminuya, respectivamente, cantidades iguales de la variable independiente.

De vuelta al Explora

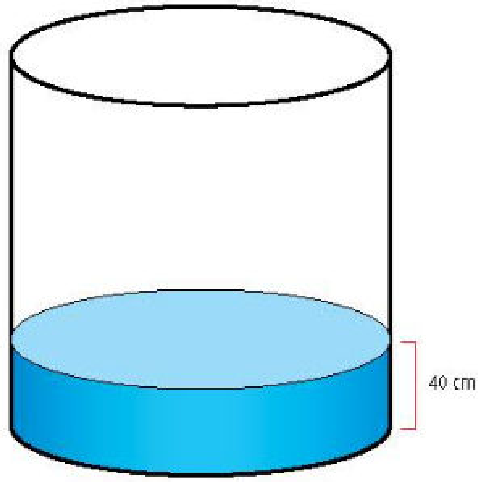
1. En parejas, relacionen las tres columnas.
2. Comparen sus respuestas con los demás, ¿son iguales?
3. Comenten cómo hicieron para relacionar las tres columnas.

Una forma para poder relacionar las tres columnas que se presentan en la situación inicial es evaluando la variable independiente x en las ecuaciones de la tercera columna con los valores dados en las tablas, obtener los valores correspondientes para la variable dependiente y, y compararlos con los que están en las tablas de la primera columna.

4. Después se debe verificar cada punto de la tabla en el plano cartesiano, unir los puntos y comparar con las gráficas de la segunda columna.
   - ¿Qué gráficas pasan por el origen?
5. Escriban las ecuaciones de las situaciones que se presentaron que sean relaciones de proporcionalidad e identifiquen la constante de proporcionalidad.

Practica

1. Una cisterna cilíndrica contiene 314 litros de agua y se ha llenado sólo hasta una altura de 40 centímetros. Si se desea llenar hasta su volumen máximo de 1570 litros, ¿cuál es la altura en metros de la cisterna?



▲ Esquema que representa una cisterna cilíndrica.

Para tu apunte

1 litro = 1 000 cm^3

⇒ Realiza una tabla de valores que muestre los litros de agua en la cisterna con respecto a la altura de la misma.

2. Adrián, Jocelyn y Dante se cooperaron para comprar una bolsa de dulces que contiene 120 piezas. Si Adrián cooperó con 10 pesos, Jocelyn con 12 y Dante con 18:
   - ¿Cuál es el costo de la bolsa de dulces?

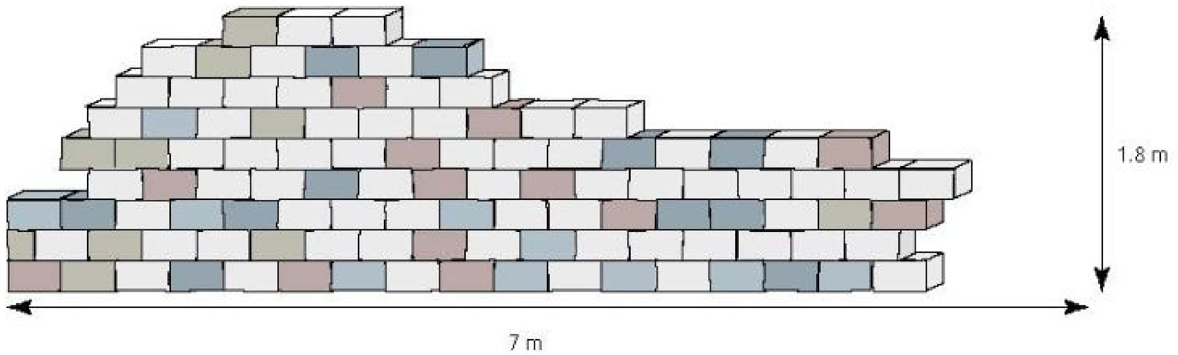
   ⇒ Construye una tabla de valores que presente el número de piezas que correspondería de acuerdo con la cantidad de pesos.
   - ¿Cuántos dulces les toca a cada uno si desean repartirlos de forma proporcional?

3. Emiliano ha decidido ahorrar 15 pesos por semana y gastarlos cada vez que junte 360 pesos.

   ⇒ Construye una gráfica que represente el dinero ahorrado con respecto a las primeras 10 semanas transcurridas.

   ⇒ Ayuda a Emiliano a representar mediante una expresión algebraica el dinero ahorrado con respecto a las semanas transcurridas.
   - ¿En cuántas semanas juntará los primeros 360 pesos?
   - ¿A cuántos meses equivale esa cantidad de semanas?
   - ¿Cuántas veces al año podrá gastar Juan los 360 pesos ahorrados?
   - Si Emiliano decidiera ahorrar los 15 pesos semanales durante todo el año, ¿cuánto ahorraría en total?

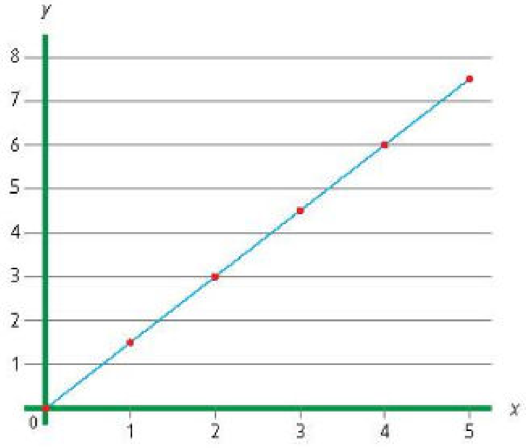
4. Don Eusebio quiere colocar una barda de bloques que mida 7 metros de largo y 1.8 metros de alto y así delimitar su terreno con el vecino. Si cada 2 bloques a lo largo cubren una longitud de 70 centímetros y cada 3 bloques a lo alto cubren una altura de 60 centímetros:



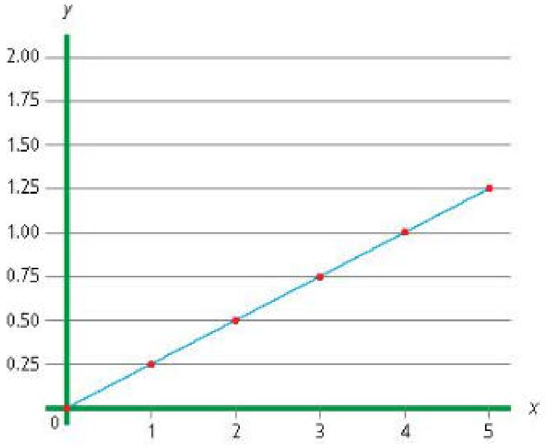
▲ Barda construida con bloques de cemento.

   ⇒ Dibuja dos gráficas, una para el largo de la barda y otra para el ancho, ambas con respecto al número de bloques.
   - ¿Cuántos bloques necesitará don Eusebio para hacer su barda?

5. Escribe en tu cuaderno la representación algebraica para cada una de las gráficas dadas.



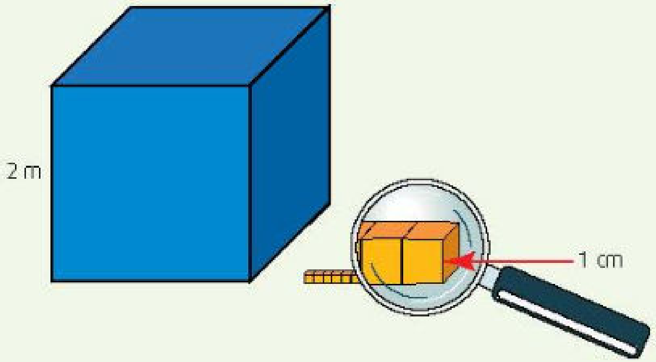
▲ Gráfica a



▲ Gráfica b

Evalúa tu avance

1. Se tiene un cubo de 2 metros de arista. Si se divide en cubos más pequeños de 1 centímetro de arista y los colocamos en línea uno al lado del otro, ¿qué longitud en metros tendrá la fila de cuadritos?



a. 8 metros
b. 600 metros
c. 80 000 metros
d. 8 000 metros

2. ¿Es una característica de las relaciones de proporcionalidad?
a. Su expresión algebraica está dada por $y = ax + b$, con $b \neq 0$.
b. Su representación gráfica es una parábola.
c. Su representación algebraica es $y = ax^2 + bx + c$.
d. Su representación gráfica es una línea recta que pasa por el origen.

Proporcionalidad y funciones

Lección 5

Representarás de forma tabular y algebraica relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas

Explora

¿Se vacía o se llena?

1. La altura en centímetros del agua en un tanque con respecto al tiempo, medido en segundos, está dada por la siguiente expresión algebraica:

$$h = \frac{1}{4}t^2 - 3t + 19$$

- ¿El tanque de agua se llena o se vacía? Comenta con tus compañeros.

Descubre y construye

◀ Los ratones de laboratorio son roedores que se utilizan para la investigación científica y suelen ser albinos.

- **Ratones a dieta**

Un grupo de biólogos estudia el efecto nutricional de una dieta alta en grasas en ratones de laboratorio. Al variar el porcentaje de grasa en el alimento, de 0 a 100%, la masa de un ratón, en gramos, está dada por la siguiente expresión:

$$M = \frac{1}{50}p^2 + 20$$

1. Completa la siguiente tabla de valores:

Porcentaje de grasa	Masa del ratón
0	
10	
20	
30	
40	
	70
	92

- ¿Cuál es la masa del ratón al inicio de la dieta?
- ¿Cuántos gramos aumenta el ratón al administrar una dieta a 10% en grasas?
- ¿Qué porcentaje de grasa se necesita administrar en la dieta para que el ratón alcance una masa de 70 gramos?
- ¿Con qué porcentaje se alcanzará la masa máxima?
- ¿Cuál será la masa máxima que alcance el ratón?

Para tu apunte

Las expresiones algebraicas como la anterior se conocen como **relaciones de variación cuadrática**, y su forma general es: $y = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$. En el caso anterior, sólo aparece el término cuadrático ax^2 y la constante c.

• ¿Qué tan lejos se encuentra?

Los siguientes valores de la tabla representan la distancia entre la escuela "Benito Juárez" y un coche que se mueve, con respecto al tiempo transcurrido:

Tiempo en segundos	Distancia entre escuela y coche en metros
0	40
1	41
2	44
3	49
4	56
5	65

1. Responde:
   - ¿A qué distancia se encuentra el coche antes de comenzar a moverse?
   - Al transcurrir el primer segundo, ¿qué pasó con el coche?, ¿se alejó o se acercó a la escuela? ¿Cuántos metros?
   - ¿Cuántos metros se movió el coche desde que comenzó a moverse hasta transcurrir los primeros 2 segundos?
   - ¿A qué distancia de la escuela se encuentra el coche al transcurrir los primeros 2 segundos?
2. Escribe una expresión algebraica que describa la distancia (D) entre la escuela y el coche al transcurrir el tiempo (t).
3. Explica qué tipo de movimiento se describe en la tabla y relaciona tu respuesta con la forma de la ecuación.

• Experto en ventas

Los ingresos mensuales en pesos de una compañía electrónica que vende x unidades de cierto artículo están dados por la siguiente expresión: $I = 400x - x^2$.

1. Responde:
   - ¿Cuál es el ingreso mensual obtenido por la compañía si vendió 20 artículos?
   - ¿Cuántos artículos vendió la compañía si su ingreso mensual fue de $5 100?
   - ¿Cuál es el ingreso mensual obtenido por la compañía si vendió 40 artículos?
   - ¿Cuál es el ingreso mensual obtenido por la compañía si vendió 60 artículos?
   - ¿Los ingresos mensuales para 40 y 60 artículos vendidos son iguales?
   - ¿Qué sucedió? ¿Qué significa? Comenta con tus compañeros y maestro.
2. Realiza una tabla de valores que muestre la cantidad de artículos vendidos con su ingreso mensual correspondiente.

Artículos vendidos	Ingreso mensual

- ¿Cuál será el ingreso máximo que pueda obtener la compañía?
- ¿Cuántos artículos tiene que vender la compañía para obtener el ingreso máximo?
- ¿A partir de qué cantidad de artículos el ingreso comienza a disminuir?
- ¿Es conveniente para la compañía vender más de esa cantidad de artículos?
- ¿Tiene sentido que a partir de una cierta cantidad de unidades vendidas el ingreso disminuya? Explica.

▲ Para resaltar los datos más importantes en la tabla puedes colorear las celdas.

Pongámonos de acuerdo

Una forma eficaz y sencilla de observar el comportamiento de una relación de variación cuadrática que modela una situación particular es hacer una representación tabular. Es decir, dar diferentes valores, aceptables de acuerdo con el contexto, a la variable independiente (por lo común representada por x), evaluarlos en la expresión cuadrática y obtener los valores de la variable dependiente (comúnmente representada por y).

1. Junto con un compañero completa la siguiente tabla de valores de acuerdo con la ecuación dada:

$y = 19.6x - 4.9x^2$

x	y

x representa tiempo en segundos y y la altura recorrida por un objeto que fue lanzado hacia arriba.

Para encontrar el valor mínimo o máximo en una relación cuadrática pueden aumentar o disminuir los valores de la variable independiente, y observar los cambios que presenta la variable dependiente hasta que encuentren el valor que buscan.

2. De acuerdo con la explicación anterior respondan:
   - ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por el objeto lanzado?
   - ¿En qué momento alcanza su altura máxima?

Posteriormente, deben dar una explicación del comportamiento de la variable dependiente, es decir, si siempre está creciendo o decreciendo, o en qué intervalos crece, en cuáles decrece, etc. y por qué pudo haber ocurrido eso.

3. Respondan:
   - ¿Cuál es la altura en t □ 1 y $t = 3$?
   - ¿Por qué sucede esto?

De vuelta al Explora

1. Vuelve al problema inicial y comenta con tus compañeros y maestro cómo puedes llegar a la respuesta de la pregunta.
2. Completa la siguiente tabla, basándote en la expresión algebraica de arriba:

$$h = \frac{1}{4}t^2 - 3t + 19$$

Tiempo en segundos	Altura en centímetros
0	
2	
4	
6	
8	
10	
12	
14	
16	
18	

- ¿Cuál es la altura inicial del agua?
- ¿Cuál es la altura del agua a los 2 segundos?
- ¿Aumentó o disminuyó el nivel del agua después de los 2 segundos? ¿Cuánto?
- ¿Cuál es la altura del agua a los 6 segundos?
- ¿Qué pasó con el nivel del agua desde el inicio hasta los primeros 6 segundos?
- ¿Cuál es la altura del agua a los 10 segundos?
- ¿Qué pasó con el nivel del agua del segundo 6 al 10?
- ¿Cuál es la altura del agua a los 12 segundos?
- Hasta este momento, $t = 12$ s, ¿qué ha pasado con el nivel del agua desde el inicio?
- A partir de $t = 12$ s, ¿qué pasa con el nivel del agua?
- ¿Cuál es tu conclusión? ¿Se llena o se vacía el tanque de agua?

3. Junto con un compañero planteen qué fue lo que pudo haber ocurrido para que el tanque de agua tuviera ese comportamiento. Después coméntenlo con el grupo.

Practica

1. Identifica qué expresión corresponde con cada tabla de valores.

◯ $y = 25 - x^2$

◯ $y = x^2 - 8x + 24$

◯ $y = x^2 - 3$

◯ $y = -x^2 + 6x + 11$

a.

x	y
0	11
1	16
3	20
5	16
7	4
9	−16

b.

x	y
−3	6
−2	1
0	−3
2	1
3	6
4	13

c.

x	y
−5	0
−1	24
0	25
1	24
5	0
6	−11

d.

x	y
0	24
2	12
4	8
6	12
8	24
10	44

2. La siguiente tabla muestra la distancia en metros que existe entre el lugar donde se encuentra Mariana y su casa, con respecto al tiempo transcurrido en minutos.

Tiempo	Distancia entre Mariana y su casa
0	0
2	180
4	320
6	420
8	480
10	500
12	480
14	420
16	320
18	180
20	0

⇒ Responde:
- ¿A qué distancia se encontraba Mariana de su casa después de que transcurrieron 6 minutos?
- ¿Qué tan lejos llegó Mariana con respecto a su casa?
- ¿Cuántos minutos pasaron para que Mariana alcanzara la distancia más lejana?
- Después de eso, ¿qué sucedió?
- ¿En qué tiempo se encontraba Mariana a una distancia de 320 metros con respecto a su casa?

⇒ Plantea junto con un compañero de clase una descripción a la situación de Mariana y la distancia respecto a su casa.

3. Las siguientes relaciones de variación cuadrática representan la altura con respecto al tiempo que alcanza una pelota al ser lanzada verticalmente hacia arriba. Realiza una tabla de valores, para cada una, y encuentra su altura máxima.

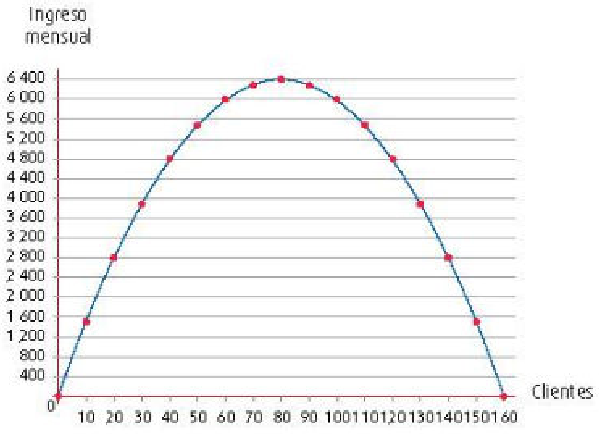
$$h = 49 - 4.9t^2$$

$$h = 24.5 - 4.9t^2$$

$$h = 29.4 - 4.9t^2$$

$$h = 19.6 - 4.9t^2$$

4. Con base en la siguiente gráfica que muestra los ingresos mensuales que tiene una empresa de seguros de acuerdo con el número de clientes, contesta lo que se te pide:



▲ Gráfica de los ingresos mensuales de la empresa de seguros.

- ¿Cuál fue el ingreso mensual de la empresa si tuvo 20 clientes?
- ¿Cuántos clientes es necesario y conveniente que tenga la empresa para que alcance un ingreso mensual de 6 000 pesos?
- ¿Cuál es el ingreso máximo que puede alcanzar la empresa?
- ¿Cuántos clientes necesita para alcanzar el ingreso máximo?

Evalúa tu avance

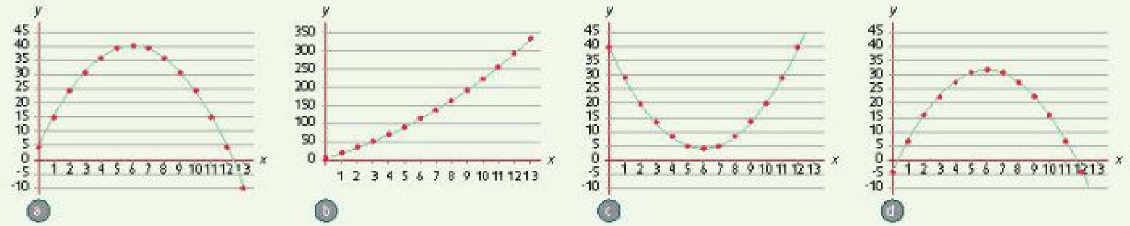
1. La población de un cultivo de bacterias en un laboratorio aumenta con respecto al tiempo como se muestra en la tabla.

Tiempo en segundos	Cantidad de bacterias
0	3
1	5
2	9
3	15
4	23

⇒ Responde:

- ¿Cuál de las siguientes expresiones algebraicas modela la situación?
  a. $y = x^2 + 3$
  b. $y = x^2 - x + 3$
  c. $y = x^2 - 3$
  d. $y = x^2 + x + 3$

2. La gráfica que representa a la ecuación $y = -x^2 + 12x + 4$ es:



Nociones de probabilidad

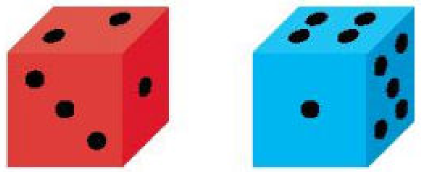
Lección 6

Conocerás la escala de la probabilidad. Analizarás las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes

Explora

¿Cuánto apuestas?

Alejandro y Luisa juegan a tirar dos dados, uno rojo y uno azul. Apuestan a que adivinarán la suma que obtendrán de los dos dados.



- Si te unieras al juego, ¿por cuál suma apostarías?

Descubre y construye

- **A resolver problemas**

El maestro Pedro pide al grupo un voluntario o voluntaria para pasar al frente a resolver un problema de matemáticas. Al no tener respuesta, decide elegir al azar, colocando los nombres de todos sus alumnos en una urna. Si en el grupo hay 9 niñas y 16 niños:

- ¿Qué es más probable que elija el maestro Pedro, un niño o una niña? ¿Por qué?
- ¿Cuál es el total de alumnos en el grupo?
- ¿Hay posibilidad de que elija a una niña?
- ¿Cuál es la probabilidad de que elija a una niña?
- ¿Cuál es la probabilidad de que elija a un niño?

Para tu apunte

La **probabilidad** se define como el grado de certeza de que ocurra un evento, y se calcula, para un evento simple, por medio de la razón de los casos favorables entre el total de casos.

La probabilidad puede ser expresada en forma de fracción, decimal o porcentaje.

En el problema anterior, la probabilidad de que el maestro Pedro elija a una niña puede ser expresada como: $\frac{9}{25}$, o 0.36, o 36%.

Para tu apunte

Tomemos el ejemplo del problema "¿Dónde se sentará Daniel?".

Se dice que el evento de elegir asientos disponibles y el de elegir asientos vendidos son **eventos complementarios** puesto que cumplen con las características de ser: 1) mutuamente excluyentes, es decir, que los asientos vendidos nunca serán asientos disponibles y, viceversa; 2) la unión de ambos eventos conforman el total de posibilidades, es decir, la suma de las probabilidades de elegir asientos disponibles y elegir asientos vendidos, es igual a 1, o al 100% de los casos.

Para tu apunte

Se dice que **dos eventos son independientes** cuando la probabilidad de uno de ellos no se ve alterada por la ocurrencia o no del otro, y viceversa.

En el problema "¿Cómo se vestirá Roberto?", la forma de elegir un pantalón y una camisa al azar, son eventos independientes, puesto que la probabilidad de elegir un pantalón es la misma aún después de haber elegido ya una camisa.

• ¿Dónde se sentará Daniel?

Daniel viajará a Toluca en autobús. Sabe que el autobús cuenta con 40 asientos numerados y que hasta el momento se han vendido 16 lugares.

- ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir un número de asiento al azar éste esté disponible?
- ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir un número de asiento al azar esté vendido?
- ¿Qué es más probable, que el asiento esté vendido o disponible?
- ¿Puede suceder que un asiento esté disponible y ocupado al mismo tiempo?
- ¿Cómo se relaciona el total de asientos con los asientos ocupados y los disponibles?

• ¿Cómo se vestirá Roberto?

Roberto tiene dos pantalones, uno negro y otro azul; y cinco camisas, 2 blancas, una roja, una verde y otra gris. Si decide tomar al azar una prenda en cada caso:

- ¿Cuáles son todas las posibles formas de vestir?

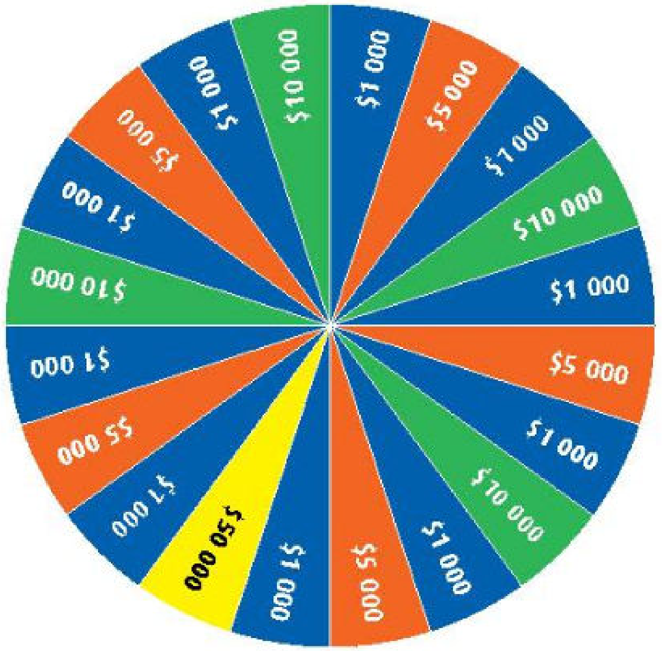
1. Completa la tabla:

Color de pantalón	Color de camisa	Combinación
Negro	Blanca	Pantalón negro y camisa blanca
	Roja	
	Gris	
Azul		
		Pantalón azul y camisa verde

- ¿Cuántas posibles formas fueron en total?
- ¿En cuántos casos vestiría camisa verde?
- ¿Cuál es la probabilidad de vestir camisa verde?
- La cantidad de pantalones posibles a vestir, ¿afectó en algo para calcular la probabilidad de vestir camisa verde? ¿Por qué?
- ¿De cuántas formas puede usar el pantalón azul?
- ¿Cuál es la probabilidad de vestir pantalón azul?
- Para calcular esta última probabilidad, ¿cambiará en algo si ya ha elegido camisa, y ésta fue roja? ¿Por qué?

Pongámonos de acuerdo

1. Comenta con tus compañeros y maestro acerca de la distribución de premios de la ruleta de la suerte.



▲ La invención del juego de la ruleta se atribuye al matemático y filósofo francés Blaise Pascal.

- ¿Por qué están distribuidos de esa forma los premios?
- ¿Por qué sólo hay un premio de $50 000?

2. Completa la tabla de probabilidades:

Probabilidad de que obtengas	Fracción	Decimal	Porcentaje
$1 000			50%
$5 000	$\frac{\square}{20} = \frac{1}{\square}$		
$10 000		0.2	
$50 000			

- El evento de que obtengas un premio de $1000 y el evento de que obtengas $10 000 ¿son mutuamente excluyentes?
- ¿Y son complementarios? ¿Por qué?
- Si al girar la ruleta se obtiene el premio de $50 000, ¿cuál es la probabilidad de que en un segundo giro se obtenga nuevamente $50 000?
- ¿El primero y segundo giro son eventos independientes? ¿Por qué?

Para tu apunte

La probabilidad mide numéricamente la posibilidad de que ocurra un evento. La escala de magnitud es entre 0 y 1. El 0 indica que no hay posibilidad alguna de que ocurra ese evento. El 1 apunta que hay completa seguridad de que ocurrirá el evento. Por ejemplo, en una rifa donde no hayas comprado boleto, tu probabilidad de ganar es nula, es decir, 0; en tanto que, si compras todos los boletos, tu posibilidad de ser el ganador es 1, o 100%, es decir, es seguro que serás el ganador, puesto que te pertenecen todos los boletos que participarán.

La probabilidad de que ocurra cierto evento se calcula dividiendo los casos favorables entre el total de casos:

P = casos favorables/casos totales

La probabilidad comúnmente se expresa en forma de razón (o fracción); sin embargo, también se utilizan los porcentajes y los números decimales.

Se dice que dos eventos son mutuamente excluyentes si sólo uno de estos eventos puede ocurrir cuando se realiza una prueba o experimento. Por ejemplo, los eventos:

- La probabilidad de obtener un número par menor o igual a 4, al lanzar un dado.
- La probabilidad de obtener un múltiplo de 3, al lanzar un dado.

Al realizar la prueba de lanzar un dado, es posible que ocurra uno de estos dos, o ninguno (en el caso que caiga, 1 o 5), pero nunca ocurrirá que sea par menor que 4 y que sea múltiplo de 3. Ocurre uno o el otro.

Ahora, si se tiene dos eventos mutuamente excluyentes y, que además su unión es igual al total de casos, entonces se dice que son eventos complementarios. Por ejemplo, al lanzar un dado y tener los eventos siguientes:

- La probabilidad de obtener un número par.
- La probabilidad de obtener un número impar.

Sólo se puede tener como resultado uno u otro, y no más.

Dos eventos son independientes entre sí cuando la probabilidad de que ocurra uno no influye en la posibilidad de ocurrencia o no del otro.

De vuelta al Explora

1. Regresa al primer problema y completa la siguiente tabla que presenta todas las sumas posibles al tirar el dado azul y rojo:

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3		5		7	
3			6		8	
4				8		10
5		7				11
6	7	8		10	11	12

▲ Antes de participar en cualquier juego de azar como el lanzamiento de dados, es conveniente saber cuál es la probabilidad de que salga un resultado u otro.

- ¿Cuántas formas diferentes de caer tienen los dos dados juntos?

2. Contesta:
   - ¿Cuál es la probabilidad de que obtengas cada una de las siguientes sumas al lanzar los dados?

P(2) =	P(5) =	P(8) =	P(11) =
P(3) =	P(6) =	P(9) =	P(12) =
P(4) =	P(7) =	P(10) =	P(1) =

   - Si lanzaras los dos dados, ¿por cuál suma apostarías? ¿Por qué? Coméntalo con tus compañeros y maestro.

- ¿Qué suma es menos probable que obtengas al lanzar los dos dados? Coméntalo con tus compañeros y maestro.
- ¿Son eventos independientes los resultados del dado azul y los del dado rojo? ¿Por qué?
- ¿Son eventos mutuamente excluyentes los resultados cuya suma es menor a 6 y aquellos cuya suma sea mayor a 9? ¿Por qué?
- ¿Son eventos complementarios los resultados cuya suma es menor o igual a 7 y aquellos cuya suma es mayor o igual a 8? ¿Por qué?

Practica

1. Si una bolsa de gomitas de dulce contiene 6 gomitas rojas, 7 verdes, 4 amarillas, 5 naranjas y 3 moradas:
   - ¿Cuál es la probabilidad de que al tomar una al azar, sea amarilla?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar una moneda al aire apuestes a que caerá águila y ganes?
3. Al correr las barajas de la lotería, ¿cuál es la probabilidad de que la primera baraja sea "el catrín"? La baraja tiene 54 imágenes.
4. La baraja de póquer o inglesa está compuesta por 52 barajas de cuatro figuras diferentes: corazones y diamantes rojos, y tréboles y picas negras. Cada figura consta de las barajas del 2 al 10, as, sota, reina y rey.
   - ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar una baraja al azar, ésta sea de color rojo?
5. En la panera de María hay 20 empanadas, unas son de fresa y otras de piña. Si la probabilidad de que al tomar una al azar sea de piña es de 2/5:
   - ¿Cuál es la probabilidad de que al tomar una al azar sea de fresa?
   - ¿Cuántas empanadas de fresa hay en la panera?

Evalúa tu avance

1. Si la probabilidad de que el maestro Pedro elija al azar a un niño para pasar a resolver un problema al frente es de $\frac{1}{3}$, elige la opción que tenga que cumpla con la probabilidad dada.
   a. 10 niños y 15 niñas
   b. 12 niños y 24 niñas
   c. 10 niños y 30 niñas
   d. 20 niños y 10 niñas

2. El evento de obtener águila y el evento de obtener sol en un lanzamiento de moneda son eventos:
   a. Independientes
   b. Complementarios
   c. Mutuamente excluyentes
   d. Dependientes

Análisis y representación de datos

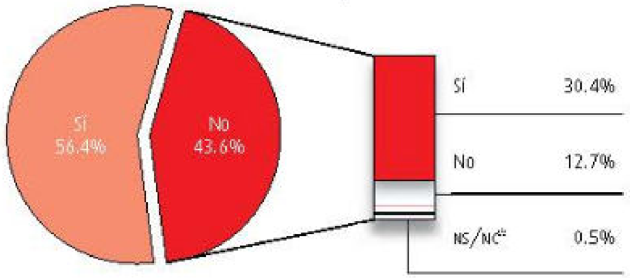
Lección 7

Diseñarás una encuesta o un experimento e identificarás la población en estudio. Discutirás sobre las formas de elegir el muestreo. Obtendrás datos de una muestra y buscarás herramientas convenientes para su presentación

Explora

Índices de lectura en México

En todos los países del Mundo existe la preocupación de que su población lea y México no es la excepción. En 2006, el Consejo Nacional para la Cultura y las Artes (Conaculta)* realizó en nuestro país la *Encuesta Nacional de Lectura*. A continuación te presentamos dos de sus resultados:



* No sabe/No contesta

▲ *Encuesta Nacional de Lectura*, Conaculta, 2006.

¿Cuál es su libro favorito?	Porcentaje	
	Sobre 86.6% que lee o ha leído	Sobre 56.4% que lee
No sabe	40.0	35.8
Otros	21.1	27.6
No contestó	14.1	7.9
Ninguno	10.4	7.9
La Biblia	4.0	3.7
Juventud en éxtasis	1.6	1.9
Don Quijote de la Mancha	1.4	1.8
Cien años de soledad	1.2	1.7
Cañitas	0.9	1.0
El Principito	0.7	1.0
Harry Potter	0.7	0.8
Los hornos de Hitler	0.7	0.2
Volar sobre el pantano	0.7	0.9
Insuficientemente especificado	0.6	0.4
Cuentos	0.5	0.7
Poemas y pensamientos	0.5	0.7
La fuerza de Shesid	0.5	0.6
El Código Da Vinci	0.4	0.6
Total	100.0	100.0

▲ *Encuesta Nacional de Lectura*, Conaculta, 2006.

* En 2015 el Conaculta se transformó en la Secretaría de Cultura.

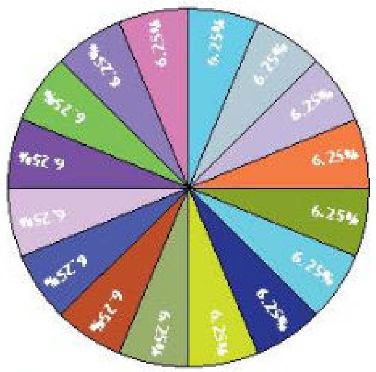
1. Después de analizar las dos tablas responde:
   - Si tuvieras que recabar la información presentada en estas tablas, ¿cómo lo harías?
   - ¿A cuánta gente le preguntarías?
   - ¿Qué tipo de preguntas le harías a las personas encuestadas para obtener este tipo de información?
   - ¿Qué conclusiones podrías obtener de las respuestas?

Descubre y construye

- **Hábitos de comida**

Para saber cuál es la comida más consumida dentro de su plantel, un grupo de alumnos de la secundaria Felipe Carrillo Puerto realizó varios trabajos organizados en equipos. En la escuela hay 200 alumnos.

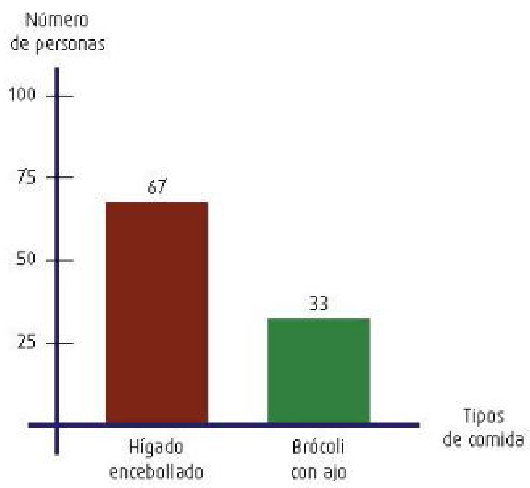
1. Analiza lo que hizo cada equipo y anota en tu cuaderno cuáles fueron sus aciertos y sus errores al realizar el trabajo de investigación:
   a. El **equipo 1** encuestó solamente a 16 alumnos a los que les hicieron una sola pregunta y obtuvieron 16 respuestas diferentes. Por lo tanto, el **equipo 1** concluyó que no hay una comida más popular que otra. Los resultados se representaron con la siguiente gráfica:



▲ Gráfica circular de la encuesta a 16 alumnos.

   b. El **equipo 2** recabó datos entre una muestra representativa de 100 alumnos. Les pidió que eligieran una comida preferida entre las siguientes opciones:
   - Opción A: Hígado encebollado.
   - Opción B: Brócoli con ajo.

En sus resultados obtuvieron que 67 alumnos prefieren el hígado encebollado y 33 alumnos el brócoli con ajo. Por lo tanto, para este equipo, la comida más popular de toda la escuela es el hígado encebollado. Lo representaron así:



▲ Gráfica de barras para representar los resultados de la encuesta aplicada a 100 alumnos.

c. El **equipo 3** decidió sólo preguntarle a 30% del total de los alumnos. Anotaron en cada una de las opciones el porcentaje obtenido y después eligieron representar los resultados en una cartulina:

▲ Cartel con los resultados de la encuesta a 30% de los alumnos.

Para tu apunte

A la pregunta de la cual surge el problema estadístico se le llama **pregunta de investigación.**

2. Responde las siguientes preguntas que te ayudarán a un mejor análisis del estudio:
   - ¿De cuántas personas consta la muestra involucrada en el estudio?
   - ¿Cuáles fueron los criterios para la selección de la muestra en cada caso? Compáralo y discútelo con algún compañero.
   - ¿Cuáles fueron las diferentes herramientas de presentación de los resultados? Compáralo y discútelo con algún compañero.
3. Después de analizar los resultados de cada equipo, decide cuáles son las ventajas y desventajas de las presentaciones de cada uno.
4. Con lo anterior, discute en grupo la mejor manera de diseñar una encuesta, obtener datos y representar la información obtenida.

Pongámonos de acuerdo

Organizados en parejas hagan las actividades necesarias para responder la siguiente pregunta: ¿Cuál es el transporte más común para llegar a su escuela?

1. Antes de empezar respondan las siguientes preguntas:
   - ¿A quiénes le preguntarán?
   - ¿A cuántas personas le preguntarán?
   - ¿Cómo registrarán todos los datos?
   - ¿Cómo presentarán los resultados al grupo?
2. Después de responder estas preguntas, diseñen una estrategia de obtención de datos y luego un análisis de los mismos. Después decidan cómo los presentarán y prepárense para exponer sus conclusiones al grupo.
3. Expongan todos los trabajos al grupo y respondan, junto con su maestro, las siguientes preguntas:
   - ¿Hubo diferencias en las conclusiones de los equipos?
   - ¿Hubo diferencias en el diseño del trabajo en cada uno de los equipos?
   - ¿Hubo diferencias en la forma de obtener datos para la encuesta?
   - ¿Qué equipo consideran que hizo un mejor trabajo? ¿Por qué?
4. Entre todos, escriban las principales características que debe tener un estudio como el que acaban de hacer.

Cuando hagan una encuesta o experimento recuerden que siempre se deben mostrar cómo se obtuvieron los datos. Asimismo, debe tener un título y una representación adecuada.

Para tu apunte

La **población** de una encuesta se refiere a una muestra representativa de personas a las que se les realizan preguntas para averiguar estados de opinión, características o hechos específicos.

De vuelta al Explora

Para responder a las preguntas del EXPLORA, no necesariamente tendrías que encuestar a todos los habitantes de la República Mexicana para conseguir un resultado válido, pero una gran muestra suele ser útil. Por ejemplo las dos tablas presentadas en la sección EXPLORA se realizaron a partir de una encuesta nacional en la que se dividió a México en seis regiones. Se aplicaron 4 057 cuestionarios en 29 estados, de los cuales se abarcaron 136 municipios. Se consideró parte de la población a todas las personas con 12 años cumplidos o más.

De la primera tabla se puede concluir que:

> "Poco más de la mitad de los entrevistados (56.4%) informa que lee libros; poco menos de la tercera parte (30.4%) declaró haberlos leído en algún momento de su vida; en tanto que 12.7% reportó nunca haber leído libros."

Fuente: Conaculta (2006). *Encuesta Nacional de Lectura*, México, p. 19.
http://sic.conaculta.gob.mx/ficha.php?table=centrodoc&table_id=144

De la segunda tabla se puede concluir que:

"Existe una gran dispersión en las respuestas a la pregunta ¿cuál es su libro favorito? Entre quienes declaran leer o haber leído alguna vez, el porcentaje más alto lo obtiene *La Biblia* (4.0%), seguida de *Juventud en éxtasis*, *Don Quijote de la Mancha* y *Cien años de soledad* (1.2%). *Cañitas*, *El Principito*, *Harry Potter* y *Volar sobre el pantano* son también de los títulos más mencionados. Llama la atención el porcentaje de entrevistados que contestó no saber (40.0%), el de los que no contestaron (14.1%) y el de los que dijeron que ninguno (10.4%).

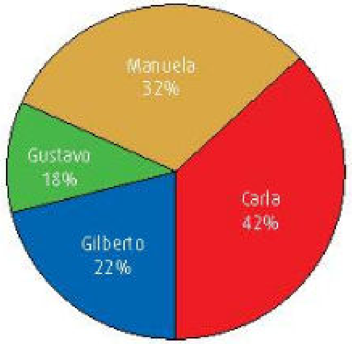
Del 56.4% de personas que declaran leer actualmente, *La Biblia* ocupa nuevamente el primer lugar con 3.7%, seguida de quienes leen *Juventud en éxtasis*, *Don Quijote de la Mancha*, *Cien años de soledad*, *El Principito*, *Volar sobre el pantano* y *Harry Potter* como los títulos más mencionados."

Fuente: Conaculta (2006). *Encuesta Nacional de Lectura*. México. http://sic.conaculta.gob.mx/ficha.php?table=centrodoc&table_id=144.

1. Para continuar con el análisis, responde las siguientes preguntas:
   - ¿Qué entiendes por dispersión?
   - ¿Qué interpretas de los textos que explican la primera y segunda tablas?
   - ¿Qué características de las gráficas describe cada tabla?
   - ¿Elegirías las mismas características para dar un análisis tuyo de las tablas?

Practica

1. En el grupo 301, las calificaciones de matemáticas del periodo fueron: A, B, D, D, C, B, A, B, C, D, B, B, B, D, C, C, A, D, B, C, A, A, A, B, C.
   ⇒ Representa los porcentajes de cada tipo de calificación en forma gráfica.
2. Las gráficas dan una rápida información visual de la relación entre dos magnitudes. Son una herramienta utilizada en muchas áreas y algunas veces quienes las hacen tratan de engañar al lector por medio de la manipulación de la gráfica.
   - ¿Podrías encontrar cuál es el engaño en esta gráfica de una encuesta?



▲ Gráfica de encuesta.

3. Con la siguiente información y reunidos en equipos, realicen las actividades indicadas más abajo:

El cáncer de mama en México es la segunda causa de muerte entre las mujeres de entre 30 y 54 años de edad. Los datos disponibles sugieren que sólo 10% de los casos en México se detecta en las fases iniciales de la enfermedad (localizada en la mama). Desde el año 2006, sólo 22% de las mujeres de 40 a 69 años se sometió a una mamografía en el último año.

- Investiguen en la página de internet del Instituto Nacional de Geografía e Informática (www.inegi.org.mx/saladeprensa/aproposito/2015/mama0.pdf) cuál es la población de su entidad federativa y calculen aproximadamente cuántas mujeres se practican la mastografía.
- Con ayuda de una hoja de cálculo realicen una gráfica de los datos que obtengan sobre las mujeres de su entidad federativa que sí se practican la mamografía.

▲ La mastografía es la radiografía de mama en película de grano fino, capaz de obtener imágenes de tejidos blandos con gran precisión.

▲ El Instituto Nacional de Estadística y Geografía suministra a la sociedad y al Estado información de calidad, pertinente, veraz y oportuna.

Datos obtenidos de: www.scielo.org.mx/pdf/spm/v51s2/v51s2a26.pdf

Evalúa tu avance

1. En la comunidad de San Jerónimo Amanalco quieren hacer una encuesta para saber cuántos estudiantes de una secundaria tienen pensado irse a trabajar a Estados Unidos. ¿Cuál de las siguientes poblaciones es la más adecuada para hacer la encuesta?
   a. Los papás de los alumnos de secundaria de San Jerónimo Amanalco.
   b. Los alumnos de secundaria de todo México.
   c. Tres alumnos de las secundarias de San Jerónimo Amanalco.
   d. Al menos a 65% de los alumnos de las secundarias de San Jerónimo Amanalco.
2. ¿Cuál de las siguientes características de una gráfica de barras es un error?
   a. Que las barras tengan diferente color.
   b. Que los ejes tengan valores a escala.
   c. Que ambos ejes tengan la misma escala.
   d. Que las barras estén horizontales.

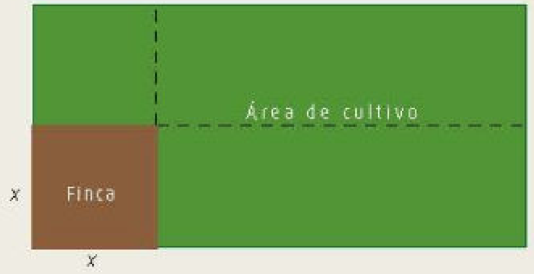
Evaluemos lo aprendido

✓ Evaluación tipo Planea

Subraya la opción que consideres correcta y, al terminar, con la guía del profesor, revisa en grupo tus respuestas.

1. La mamá de Rocío heredó un terreno de cultivo de 2 hectáreas y ha pensado destinar la octava parte del mismo con forma cuadrada para la construcción de una finca campestre tal como se muestra en la figura.

- ¿Cuál es la medida del lado de la finca?

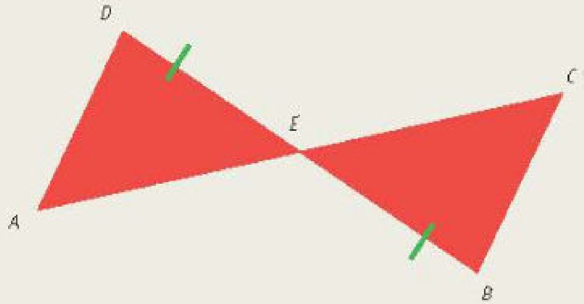


a. 1 250 m.
b. 0.5 m.
c. 50 m.
d. 2 500 m.

2. La mesa del comedor de la casa de Karla es de forma rectangular y su largo mide 2 metros más que su ancho. Si se sabe que el área que ocupa la superficie de la mesa es de 8 m^2, ¿cuáles son sus dimensiones?

a. largo = 8 m, ancho = 1 m.
b. largo = 2 m, ancho = 4 m.
c. largo = 6 m, ancho = 2 m.
d. largo = 4 m, ancho = 2 m.

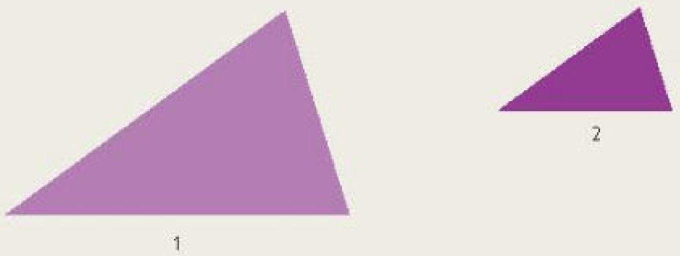
3. César observa la siguiente figura con mucha atención.



- ¿Qué información adicional a la mostrada por la figura necesitaría saber para demostrar que los triángulos *ADE* y *CBE* son congruentes por el criterio LAL?

a. $\angle ADE \cong \angle CBE$
b. $\overline{AC} \cong \overline{CE}$
c. $\overline{AE} \cong \overline{CB}$
d. $\angle DAE \cong \angle BCE$

4. En una clase de matemáticas, el maestro pide a los alumnos del grupo que observen por unos momentos el siguiente par de triángulos semejantes. Luego, le pide a Evelyn que identifique una propiedad que cumplan estos dos triángulos.



- ¿Cuál de las siguientes opciones debería escoger Evelyn para responder en forma acertada la solicitud del maestro?

a. Los lados del triángulo 1 miden el triple que sus correspondientes en el triángulo 2.
b. Los ángulos del triángulo 1 miden el doble que sus correspondientes en el triángulo 2.
c. Los ángulos del triángulo 1 miden lo mismo que sus correspondientes en el triángulo 2.
d. Las razones de los lados correspondientes del triángulo 1 y 2 no conforman una proporción.

5. El profesor de matemáticas encargó al grupo una tarea por equipos acerca del tema de proporcionalidad. A José María su equipo le pidió que se encargara de buscar una gráfica que representara una relación de proporcionalidad para incluirla en el trabajo. Si graficara las siguientes tablas de datos, ¿cuál de ellas debería elegir José María para entregar a su equipo?

a

Presión del gas (atm)	Volumen del gas (m^3)
0.5	12.7
1	11.5
1.5	9.9
2	8.1
2.5	6.3

b

Distancia recorrida(m)	Tiempo empleado (s)
0	0
12	5
24	10
36	15
48	20

c

Tiempo caída libre(s)	Altura (m)
0	126.0
1	121.1
2	106.4
3	81.9
4	47.6

d

Radio de la esfera (cm)	Volumen de esfera (cm^3)
1	4.186
2	33.493
3	113.040
4	267.946
5	523.333

6. Jesús pasó el verano anterior en la granja de su tío, en donde se encargó de registrar el nacimiento por semana de las aves que allí se criaban, tales como pájaros, pollos y patos. Con los datos obtenidos después de un mes hizo la siguiente tabla:

Semanas	Crías
0	1
1	4
2	13
3	28
4	45

- ¿Cuál de las siguientes ecuaciones representa la tasa de natalidad de las aves en la granja?

a. $2x^2 + 1$
b. $2x^2 - x$
c. $3x^2 - 1$
d. $3x^2 + 1$

7. En la casa de Gaby hay un frutero en el centro de la mesa que contiene 3 naranjas, 2 toronjas, 5 mandarinas, 4 manzanas, 2 peras, 1 mango y 3 ciruelas. Por la mañana, Gaby sale deprisa de casa para llegar a tiempo a la escuela y toma sin ver una fruta. ¿Cuál es la probabilidad de que, por azar, elija una mandarina?

a. $\frac{1}{4}$

b. $\frac{1}{5}$

c. $\frac{15}{20}$

d. $\frac{5}{19}$

8. El papá de Melisa trabaja como gerente de mercadotecnia de una empresa juguetera. Reúne a su equipo de trabajo para diseñar una estrategia que les permita obtener la información necesaria para crear y comercializar un nuevo juguete que sea del gusto de la mayoría de los niños. Tras la junta, se le presentan algunas sugerencias. ¿Cuál de las siguientes propuestas es la más confiable para el propósito?

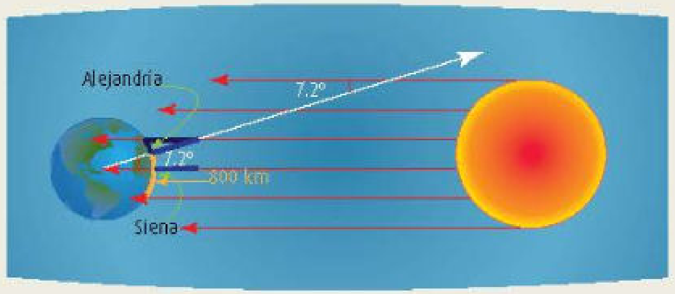
a. Hacer encuestas a un grupo amplio de estudiantes elegidos al azar en un gran número de escuelas de la localidad.
b. Que cada empleado le pregunte sus hijos, sobrinos o nietos sobre sus juguetes favoritos.
c. Preguntar sobre sus preferencias de juguetes a todos los niños que vivan en la calle más cercana a la juguetería.
d. Preguntar a todos los empleados que sean padres de familia sobre los gustos de sus hijos.

✓ Evaluación tipo PISA

Eratóstenes y la circunferencia terrestre

Eratóstenes observó que al medio día en el solsticio de verano, una vara enterrada en la tierra en la ciudad de Siena (hoy Asuán, Egipto) no presentaba sombra, pero en Alejandría sí. Con un instrumento parecido al reloj solar, determinó que el ángulo formado por la vara y los rayos solares en Alejandría era de 7.2°. Pensó que al estar tan alejado el Sol de la Tierra, sus rayos podían suponerse como paralelos entre sí; además, al prolongarse los rayos que pasan por las dos ciudades, éstos se unían en el centro de la Tierra formando el mismo ángulo. En aquel tiempo se sabía también que ambas ciudades estaban sobre el mismo meridiano, separadas por una distancia de 5 000 estadios (aproximadamente 800 km).

El siguiente esquema muestra la información antes mencionada. Con base en ella, responde las cuestiones que aparecen después:



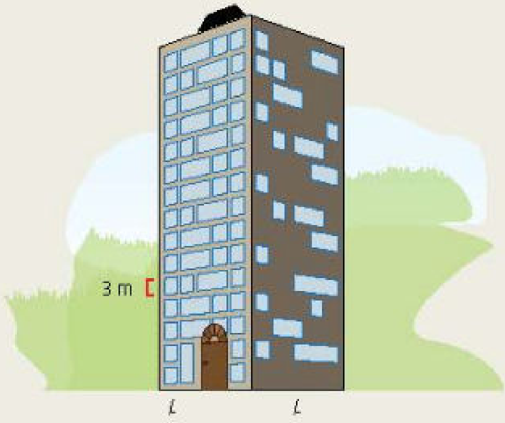
1. Justifica, con base en tus conocimientos sobre ángulos entre rectas paralelas, por qué son congruentes los ángulos formados por la vara y los rayos solares en Alejandría, y el formado en el centro de la Tierra por sus prolongaciones.
2. De acuerdo con los datos dados y pensando de manera similar a Eratóstenes, ¿cuál sería la proporción adecuada que propondrías para resolver el problema de encontrar el valor de la longitud de la circunferencia terrestre?
3. Completa la tabla siguiente y encuentra la medida que obtuvo Eratóstenes para la longitud de la circunferencia de la Tierra.
   - Los valores que conforman la tabla, ¿representan una relación de proporcionalidad? Explica.

Ángulo central	Arco de la circunferencia terrestre
7.2°	800 km
72°	
720°	
→ 360°	

4. Con su experimento, Eratóstenes demostró que la Tierra es redonda y no plana como se creía entonces.
   - ¿Qué hubiera ocurrido en Alejandría con la sombra de la vara si la Tierra hubiese sido plana?

De visita al nuevo edificio

El padre de Pedro trabaja para una firma de arquitectos que está encargada de la construcción de un edificio para oficinas que contará con 4335 m^2 de superficie. Cada piso tendrá forma cuadrangular y una altura de 3 m; además el proyecto contempla que la torre tenga 15 pisos de alto.



1. ¿Cuáles son las dimensiones de los lados de la base de este edificio?
2. Después de un tiempo y una vez terminada la obra, en lo alto del edificio se dispuso un mirador para que todos aquellos visitantes que así lo quisieran, pudieran tener una panorámica de la ciudad. Cierta ocasión, Pedro dejó caer una pequeña pelota de hule desde lo alto del mirador, ¿en cuánto tiempo la pelota impactó el suelo suponiendo que el aire no ejerce resistencia a su caída? (Pista: $g = \frac{1}{2}gt^2$, donde $g = 9.8$ m/s^2).
3. Pedro y su hermano Jonathan suben al mirador y después de un rato deciden regresar a casa, pero antes, Pedro idea un reto: Jonathan trae consigo una bolsa oscura con algunas pelotas de plástico en su interior (cinco de color azul y seis de color amarillo), todas del mismo tamaño y del mismo material, así que Pedro sugiere que cada uno saque una pelota sin ver de la bolsa y dependiendo del color que tenga, será la forma en que bajarán del edificio, esto es, si alguien extrae una bola azul podrá descender por el ascensor, pero si le toca amarilla tendrá que hacerlo por las escaleras.
   - ¿Cuál es la probabilidad de que el primero en extraer una pelota la saque de color azul?
   - ¿Y de color amarillo?
4. Los eventos "extraer una bola azul" y "extraer una bola amarilla":
   - ¿Son mutuamente excluyentes?
   - ¿Son complementarios?
   - ¿Son independientes?
   - Explica. Si no lo son, establece en qué casos pudieran serlo (de ser posible).

BLOQUE 2

B2

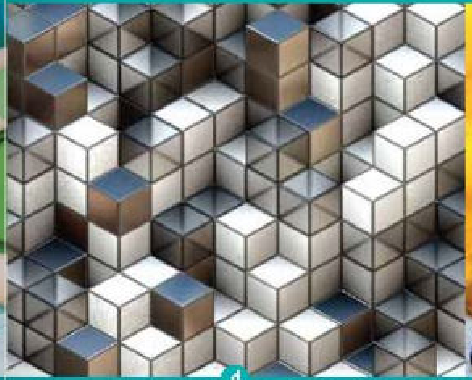
COMPETENCIAS

- Resolver problemas de manera autónoma.
- Comunicar información matemática.
- Validar procedimientos y resultados.
- Manejar técnicas eficientemente.


a


b


c


d


e


f

APRENDIZAJES	EJES / TEMAS Y LECCIONES	SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRÁICO	FORMA, ESPACIO Y MEDIDA	MANEJO DE LA INFORMACIÓN
• Explicarás el tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) que se aplica a una figura para obtener la figura transformada. Identificarás las propiedades que se conservan. • Resolverás problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras.		**Patrones y ecuaciones** L8 Usarás ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y las resolverás usando la factorización.	**Figuras y cuerpos** L9 Analizarás las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras.	**Nociones de probabilidad** L13 Calcularás la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma).
			L10 Construirás diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.	
			Medida L11 Analizarás las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.	
			L12 Explicitarás y usarás el teorema de Pitágoras.	

a. En la naturaleza podemos encontrar diversas formas geométricas.

b. Es común encontrar traslación de figuras en ornamentos para casas y edificios.

c. Comunícate con tus compañeros, trabaja en equipo.

d. Algunos problemas se resuelven al modelar una situación usando las ecuaciones cuadráticas.

e. El sextante permite medir ángulos entre dos objetos.

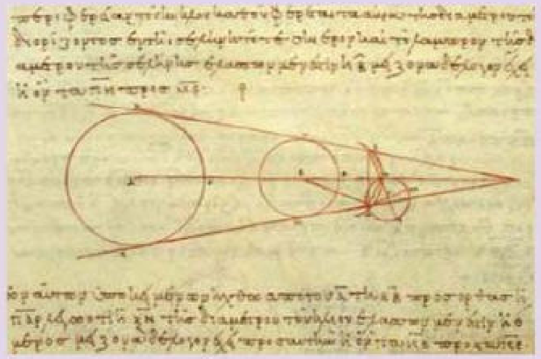
f. La aplicación de las simetrías en las construcciones es un aspecto que refleja técnica, equilibrio y estética, Milwaukee Art Museum.

Engánchate

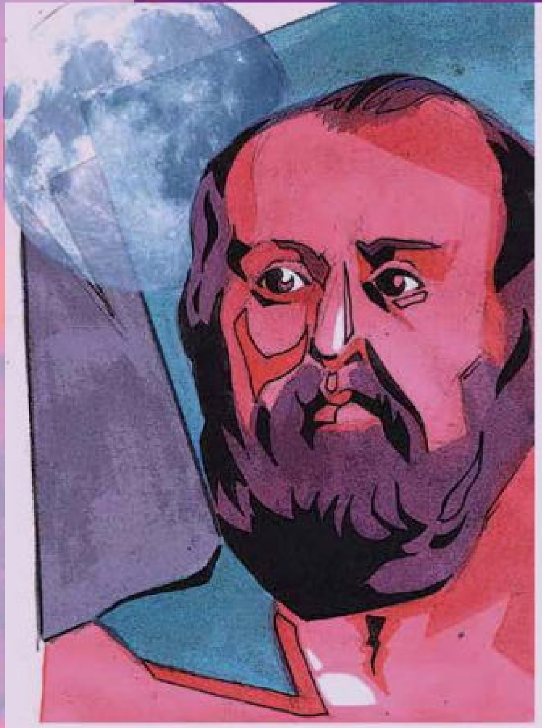
Medición de la distancia de la Tierra a la Luna

Si sabes el tamaño de un objeto, puedes estimar la distancia a la que se encuentra al observar su tamaño aparente (entre más lejos, más chiquito). De manera similar, si sabes la distancia a la que está, es posible aproximar su tamaño. Si el objeto de interés está en la Tierra, puedes obtener la distancia (yendo hacia él) o su tamaño (midiéndolo).

Piensa en la Luna. A pesar de poderla ver casi todas las noches, no es posible medirla como lo hacemos con los objetos de la Tierra si no conoces su tamaño ni la distancia que hay de nuestro planeta a ella. ¿Cómo encontrarías ambos datos? De no saber nada de ella podríamos pensar que es más pequeña de lo que es y que está más cerca o que es más grande de su tamaño real y está más lejos. Hace unos 2300 años, el astrónomo griego Aristarco de Samos (310-230 a. C.) calculó su diámetro y la distancia que hay de la Tierra a la Luna.



▲ Reproducción del trabajo de Aristarco para medir el diámetro de la Luna y su distancia a la Tierra.



◀ Aunque fue reconocido como astrónomo, Aristarco en su época fue llamado el "Matemático" y citado como uno de los pocos hombres que tenía un profundo conocimiento de todas las ramas de la ciencia.

El método de Aristarco es sumamente ingenioso, aunque para llevarlo a la práctica se requiere de un ¡eclipse lunar! Si bien los eclipses lunares no ocurren todos los días, sí puedes entender el procedimiento.

¿Puedes imaginar cómo logró hacer Aristarco esos cálculos? Ten en cuenta que las herramientas de medición y de todo tipo disponibles en esa época eran muy primitivas (no podía reflejar un láser y medir el tiempo de recorrido de la luz, por ejemplo).

En la sección final, Evaluemos lo aprendido, encontrarás un esquema de su método y una serie de razonamientos bien planteados que pueden responder preguntas complejas como ésta.

Lee más...

Acerca de Aristarco: http://principiatechnologica.com/2013/05/21/distancia-y-dimensiones-de-la-luna-aristarco-de-samos/

Libros del Rincón: Cowan, Finlay, *Dibujar y pintar personajes de fantasía*, México, SEP, Editorial Norma, 2007.

Patrones y ecuaciones

Lección **8**

Aprenderás a usar ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y las resolverás usando la factorización

Explora

Lotes tipo

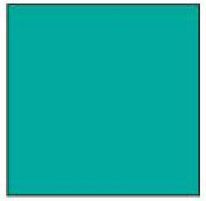
Unos constructores van a fraccionar un terreno en lotes rectangulares. El terreno tipo debe tener un área total de 160 m². Para dimensionarlo toman como base un módulo cuadrado al que aumentan 10 metros en uno de sus lados y en el otro lo reducen 2 metros.

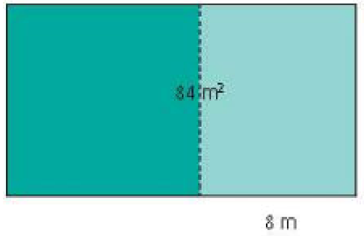
- ¿Cuáles son las dimensiones finales del terreno?
- ¿Cuáles son las medidas del módulo original?

Descubre y construye

• Otro módulo

¿Cuáles son las dimensiones de otro módulo cuadrado al que se le aumenta en uno de sus lados 8 metros para que el área del terreno final sea de 84 m²?





1. Responde:
   - ¿Los dos lados del terreno cambian de medidas?
2. Nombra algebraicamente el ancho del terreno.
3. Nombra algebraicamente el largo del terreno.

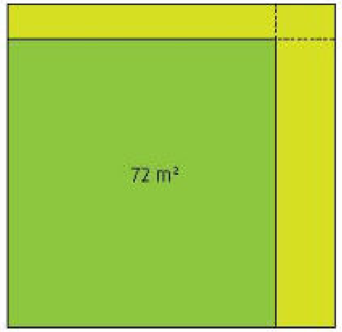
4. Representa algebraicamente el área del terreno final.
   - ¿Qué operación planteas para resolver el caso anterior?
   - ¿Cuál es el área del terreno final?
5. Representa la ecuación que modela el área del terreno igualando las dos últimas expresiones.
6. Encuentra las medidas del terreno final que satisfaga la ecuación anterior.

   Largo: ____________ Ancho: ____________
7. Encuentra las medidas del terreno cuadrado.

   Largo: ____________ Ancho: ____________

• Más pequeño

A partir de un tercer módulo cuadrado, los constructores redujeron en un lado 2 metros y en el otro 1 metro con lo que obtuvieron un terreno con un área de 72 m². ¿Cuáles son las dimensiones del módulo cuadrado inicial?



1. Responde:
   - ¿Sigue siendo cuadrado el terreno después de reducir las medidas indicadas?
2. Representa algebraicamente el área del terreno reducido.
3. Lleva la ecuación cuadrática anterior a la forma $x^2 + bx + c = 0$.
4. Factoriza la parte izquierda de la ecuación cuadrática. Recuerda que los factores de los trinomios de este tipo son binomios de la forma $(x \pm a)$.
   - ¿Cuáles son las soluciones?

• ¿Más grande o más chico?

¿Cuánto aumentan o disminuyen los lados de un terreno cuadrado cuya ecuación cuadrática asociada es $x^2 + 5x + 6 = 56$?

1. Responde:
   - ¿Cuál es el área final del terreno al aumentar o disminuir los lados del módulo cuadrado?
2. Factoriza la parte izquierda de la ecuación cuadrática asociada (sin igualar a cero).
3. Representa el terreno con un dibujo.
   - ¿Cuál era el área del terreno cuadrado antes de aumentar o disminuir?

Para tu apunte

Otra forma de resolver la ecuación cuadrática para el problema "Otro módulo", es aplicar el método de factorización. A continuación presentamos su desarrollo.

Una vez planteada una ecuación como la del problema anterior:

$$x(x + 8) = 84$$

Se procede a aplicar la propiedad distributiva en el lado izquierdo:

$$x^2 + 8x = 84$$

Posteriormente, se iguala a cero para dejar un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ del lado izquierdo:

$$x^2 + 8x - 84 = 0$$

Después, se separa el trinomio en dos factores de la forma $(x \pm a)(x \pm b)$:

$$(x + 14)(x - 6) = 0$$

Nota: si multiplicas la parte izquierda tendrás el resultado del trinomio anterior.

Por último, cada factor se iguala a cero, ya que un producto es igual a cero si alguno de sus factores es cero, o ambos.

$$(x + 14) = 0 \quad \text{o} \quad (x - 6) = 0$$
$$x = -14 \quad \text{o} \quad x = 6$$

Ambas son soluciones de la ecuación cuadrática $x^2 + 8x - 84 = 0$. Sin embargo, en este caso sólo se toma la segunda, puesto que x representa una longitud, la del cuadrado inicial que no puede ser negativa.

Pongámonos de acuerdo

• Aprendamos la técnica

Observa y analiza las factorizaciones de las siguientes ecuaciones cuadráticas:

$x^2 + 4x - 12 = 0$	$x^2 - 6x + 8 = 0$	$x^2 + 3x + 2 = 0$	$x^2 - 5x - 14 = 0$
$(x - 2)(x + 6) = 0$	$(x - 2)(x - 4) = 0$	$(x + 1)(x + 2) = 0$	$(x + 2)(x - 7) = 0$

1. Comenta con tus compañeros y maestro cuál es el método más eficaz para factorizar las ecuaciones cuadráticas. Responde:
   - ¿Cómo eligen los signos de los binomios?
   - ¿Cómo escogen los números que forman los binomios?
   - ¿Qué relación tienen los números que forman los binomios y sus signos con el tercer término de la ecuación cuadrática?
   - ¿Qué relación tienen los números que forman los binomios y los signos que forman los factores con el coeficiente del segundo término de la ecuación cuadrática?
2. Responde:
   - ¿Encontraron similitudes entre las respuestas que dieron anteriormente y lo descrito en los incisos anteriores?
   - ¿Les faltó considerar algo más?
3. Utilicen los pasos anteriores y verifiquen las factorizaciones de los problemas ya resueltos.

De vuelta al Explora

Regresa a la primera actividad de la lección y aplica lo aprendido.

Tenemos que a partir de un módulo cuadrado se obtiene un terreno rectangular con un área final de 160 m². Para ello, a uno de los lados se le aumentaron 10 metros y al otro se le redujeron 2 metros.

1. Responde:
   - ¿Cuál es la ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx - c = 0$ que sirve para resolver este problema?
   - ¿Cuáles son las dimensiones del terreno final?

Para tu apunte

Una ecuación cuadrática de la forma $x^2 + bx + c = 0$, donde $a = 1$, puede factorizarse de la siguiente forma:

⇒ Cuando la ecuación está igualada a cero, se separa en dos factores con forma de binomio en el lado izquierdo: $(x \pm \quad)(x \pm \quad)$.

⇒ Para elegir los signos intermedios de los binomios, se tiene que considerar el signo de la constante c: si c es positiva, entonces los signos son iguales, es decir, o los dos son positivos o los dos son negativos. Esto se determina según el signo del coeficiente b: si es positivo, los signos de ambos binomios lo serán, de lo contrario, serán negativos. Si c es negativa, entonces los signos de los binomios serán diferentes, es decir, uno positivo y otro negativo (más adelante retomaremos este tema).

⇒ Además, los números que conforman los binomios deberán ser divisores de la constante c, es decir, dos números que multiplicados sean c. Y que en caso de que los signos sean:

a) iguales, sumados los factores sean b, o si son,

b) diferentes, los factores restados resulten b, y el factor mayor deberá tener el mismo signo que b.

Practica

1. El cuadrado de la edad de Felipe y la edad de Noé, que es tres veces la edad de Felipe, suman un total de 88 años. ¿Cuál es la edad de cada uno?
2. El área de un cuadrado es igual a 14 veces la medida de su lado. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?
3. La suma de cuadrados de dos números es 250. Si la diferencia entre ellos es de 4 unidades, ¿cuáles son las dos parejas de números que lo resuelven?

4. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas e identifica los factores de solución mediante un programa que se encuentra en la siguiente página de internet: https://www.mathsisfun.com/quadratic-equation-solver.html

   a. $x^2 - 7x - 60 = 0$
   b. $x^2 - 22x + 121 = 0$
   c. $x^2 + 8x = 0$
   d. $x^2 - 16x = 0$
   e. $x^2 + 5x + 8 = 0$

   Nota: Llena los espacios en blanco con los valores de a, b y c de la ecuación cuadrática correspondiente a cada inciso. Recuerda que a es el coeficiente del término al cuadrado, b del lineal y c la constante. Asegúrate de escribirlos con su signo correspondiente.

⇒ Responde las siguientes preguntas:

- ¿Qué relación encuentras entre una ecuación que tiene dos soluciones o raíces (Roots) con la gráfica que arroja el programa?
- ¿Cómo son la(s) solución(es) (Roots), los factores (Factored) y la gráfica de la ecuación del inciso b?
- ¿Qué significado tiene si al introducir una ecuación al simulador se lee la leyenda "It has Complex Roots" (Tiene raíces complejas)?
- ¿Qué sucede en este último caso con la gráfica que muestra el programa?

En conclusión, ¿cuántas soluciones puede tener una ecuación cuadrática?

5. Entra a la siguiente liga para ver el video: http://bajar.video/Telesecundaria+Matem%C3%A1ticas+III+Bloque+2+Secuencia+9+Ecuaciones+cuadr%C3%A1ticas+y+factorizaci%C3%B3n?id=wyvl-MEr1Lk

Reúnete en equipo con tres compañeros e intenten resolver los siguientes ejercicios siguiendo los pasos como se realizan en el video:

⇒ Construyan un rectángulo con un cuadrado de área x^2, seis de área x, y ocho de área de una unidad (las figuras como las del video).
- Una vez construido el rectángulo, si éste tiene un área de 120, ¿cuánto mide el lado del cuadro?

⇒ Construyan un rectángulo con un cuadrado de área x^2, siete de área x, y doce de área de una unidad.
- Una vez construido el rectángulo, si éste tiene un área de 72, ¿cuánto mide el lado del cuadrado?

⇒ Construyan un rectángulo con un cuadrado de área x^2, cinco de área x, y doce de área de una unidad.
- Una vez construido el rectángulo, si éste tiene un área de 36, ¿cuánto mide el lado del cuadro?

Evalúa tu avance

1. La base de un triángulo es 5 unidades mayor que la altura. Si su área es de 18 cm^2, ¿cuál es la ecuación cuadrática que modela la situación descrita y sirve para encontrar la altura del triángulo?

a. $x^2 + 5x = 0$

b. $x^2 + 5x - 36 = 0$

c. $x^2 - 5x + 36 = 0$

d. $x^2 - 5x - 18 = 0$

2. El área de un cuadrado se duplica al aumentar uno de sus lados 7 metros. ¿Cuál de las siguientes expresiones algebraicas representa lo anterior?

a. $x^2 = x^2 + 7$

b. $x^2 = 2x^2 - 7$

c. $2x^2 = x^2 + 7x$

d. $x^2 = 7$

Figuras y cuerpos

Lección 9 Analizarás las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras

Explora

Los mosaicos de la Alhambra

La Alhambra es una ciudad amurallada construida por los árabes en el siglo XII en lo que hoy es Granada, España. Parte de su gran belleza es que tiene en su interior mosaicos con diseños geométricos que encierran maravillosos secretos. Observa el siguiente mosaico de la Alhambra.

▲ En la Alhambra, los árabes produjeron formas hasta entonces desconocidas en la historia del Arte.

1. Trata de dibujar alguna figura que al hacer copias de la misma y rotarla o trasladarla, cubra todo el plano, tal como los árabes hicieron en este diseño.

2. Analiza cuáles son las propiedades que se mantienen y cuáles cambian al ser rotadas y trasladadas.

Descubre y construye

• Movimiento de estrellas

Vistas desde la Tierra las estrellas en el cielo en apariencia se mueven muy lento. Una forma de comprobarlo es comparar dos fotografías de la misma región del cielo tomadas desde un punto en la Tierra con una diferencia de 100 años. De hecho, para recorrer una distancia correspondiente al diámetro de la Luna (tal y como la vemos desde la Tierra) a algunas de ellas les tomaría aproximadamente 500 años.

Si la siguiente figura representa una estrella en el cielo que se desplaza 10 centímetros a la derecha después de mucho tiempo, ¿cómo se vería en el siguiente plano?

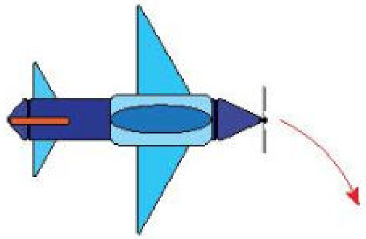
1. Dibújala.

2. Responde:
   - ¿Qué tomaste como referencia para medir los 10 cm y copiar la figura?
3. Toma cualquier punto de la estrella original y nómbralo *A*. Toma el punto correspondiente de *A* de la estrella trasladada y llámalo *A′*. Traza un vector (o flecha) que vaya de *A* a *A′* y verifica que mida 10 cm.
4. Haz el paso anterior con varios puntos correspondientes de las estrellas y responde:
   - ¿Cuánto miden todos los vectores?
   - ¿Cambió de dirección la punta amarilla después de hacer la traslación?
   - ¿Se modificaron los ángulos de las puntas de la estrella?

Si la estrella se deformó, verifica que los vectores que trazaste sean paralelos y de la misma medida.

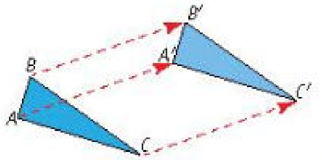
• Los juegos de la feria

Salvador mira los juegos mecánicos de la feria desde lo alto de la terraza de su casa. Observa que al detenerse el juego que tiene un avión azul, éste queda a 120° de su posición inicial. Si el siguiente dibujo muestra la posición inicial, ¿cómo se vería la posición final del avión azul?



Para tu apunte

Una **traslación** es un movimiento sin un cambio de orientación. La traslación está definida por un vector. Un **vector** es una herramienta que nos dice el sentido, la magnitud y la dirección con la que se desplazan los objetos geométricos.

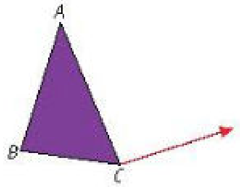


1. Nombra cada vértice o punto importante del avión.
2. Rota cada uno de los vértices o puntos importantes con respecto al punto rojo. Utiliza regla, transportador y compás.
3. Responde las siguientes preguntas:
   - ¿Cómo mediste los 120°?, ¿desde cuál punto partiste para poder medir exactamente esos 120°?
   - ¿Hacia dónde se dirige la punta del avión rotado con respecto de la punta del avión original?
   - ¿El avión cambió de tamaño?
   - ¿Se alejó del punto de rotación?
   - ¿Cambió de forma?
   - ¿Cambio la dirección?
   - ¿La distancia de cada vértice o línea importante de la figura rotada hacia el centro es la misma que la de la figura original al centro?
   - Verifica que las distancias del centro hacia diferentes vértices del avión coincidan con las distancias del centro hacia sus homólogas del avión rotado.

Pongámonos de acuerdo

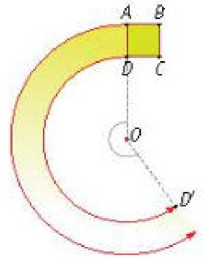
Reunidos en parejas realicen las siguientes actividades:

1. Encuentren la figura resultante de trasladar el siguiente triángulo con la distancia y la dirección señalada con el vector. Llamen a los vértices del nuevo triángulo *A′B′C′*, respectivamente.



   - ¿Cuánto miden los lados *AB* y *A′B′*?
   - ¿A qué distancia está el punto B del punto B′?
   - ¿Cuánto mide el ángulo $\angle BAC$ y cuánto mide el ángulo $\angle B'A'C'$?
   - ¿Todos los lados son del mismo tamaño?

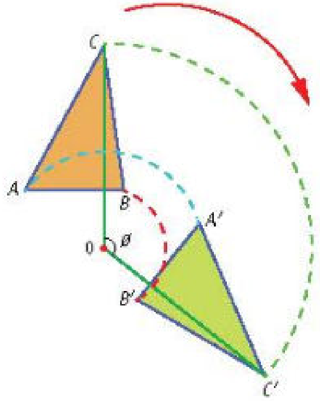
2. Encuentren la figura resultante al rotar el cuadrado en torno al punto *O*. Llamen a los vértices del cuadrado rotado *A′B′C′D′*.



▲ En el dibujo está marcado como ejemplo, la rotación del punto *D* al punto *D′*

Para tu apunte

La **rotación** de una figura es el movimiento de ésta alrededor de un punto fijo llamado centro. La rotación requiere de la magnitud de un ángulo (ø) y el sentido del movimiento.



Para tu apunte

En la traslación de figuras se mantiene la forma, el tamaño y la orientación con respecto a la figura original.

- ¿Cuánto miden los lados AB y $A'B'$?
- ¿Cuánto mide el ángulo de rotación marcado en la figura?
- ¿Los ángulos interiores de la figura rotada se modifican?

Para tu apunte

En la rotación de figuras se mantiene la forma y el tamaño. La orientación de la figura rotada cambia con respecto a la original.

De vuelta al Explora

Observa las rotaciones de las figuras que hay en el mosaico de la Alhambra y responde:

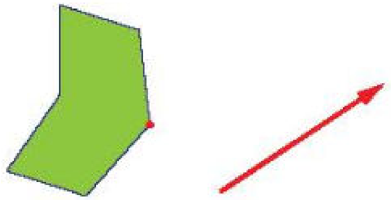
- ¿Qué figuras tomarías de base para continuar el mosaico hacia cualquier lado?
  - ⇒ Marca alguna figura en particular que al rotarla sobre algún punto específico (identifícalo), coincide con otra figura de igual tamaño y forma.
- ¿Cuántos grados hay que rotar la figura para que esto suceda?
  - ⇒ Marca alguna figura en particular que al trasladarla hacia alguna dirección específica, coincida con otra figura de igual tamaño, forma y orientación. Indica la dirección con un vector.
  - ⇒ Encuentra todas las rotaciones y traslaciones que puedas.

Practica

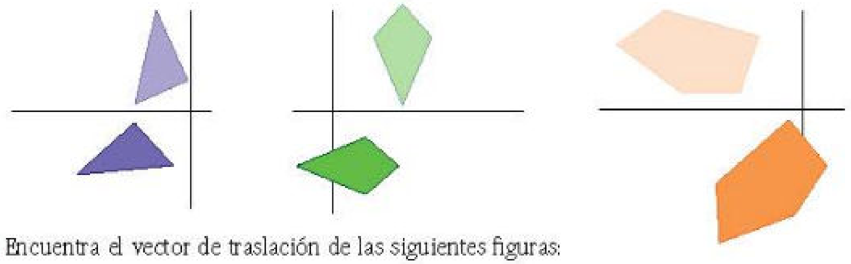
1. Copia en una hoja en blanco la siguiente figura y rótala con los siguientes ángulos de rotación: 15°, 45°, 90°, 125°, 260° y 360°. Hazlo alrededor de un punto de tu elección cercano a la figura y con el sentido señalado.

- ¿En todos los ángulos de rotación cambió la dirección de la forma de la figura?
  - ⇒ Compara tu dibujo con el de algún compañero y discutan el porqué de las diferencias entre sus dibujos.

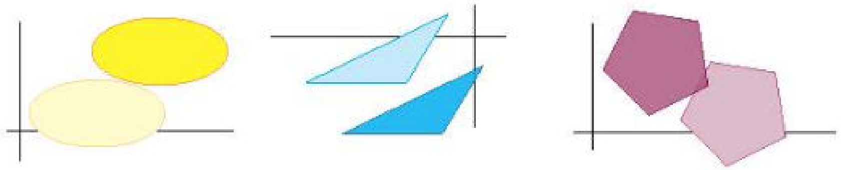
2. Utiliza la misma figura del ejercicio anterior y trasládala con un vector trazado a 125° y con las siguientes medidas: 1 cm, 5 cm, 7 cm y 10.5 cm.
   - ¿Se modificó la forma?
     - ⇒ Compara tu dibujo con el de algún compañero y discutan el porqué de las diferencias entre el dibujo inicial y el trasladado.
3. Rota la siguiente figura 35° desde el punto rojo y luego traslada la figura según el vector dibujado.



4. Encuentra el punto y ángulo de rotación de las siguientes figuras:



5. Encuentra el vector de traslación de las siguientes figuras:

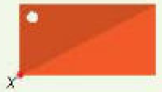


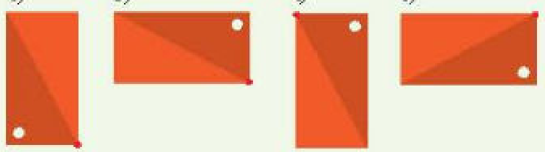
6. Los mosaicos de la Alhambra son patrones de figuras a los que también se conoce con el nombre de teselaciones. Consulta las siguientes páginas de internet donde podrás investigar más acerca de cómo se construyen:
   - Teselaciones básicas:
     http://www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/teselaciones.html
   - Teselaciones realizadas por el artista holandés M. C. Escher:
     http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/escher.htm

   ⇒ A partir de estas ideas, realiza un mosaico original y compártelo con tus compañeros.

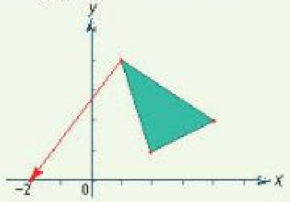
Evalúa tu avance

1. ¿Cuál es la figura resultante al rotar la siguiente figura 270° sobre el punto x?





2. Encuentra las coordenadas de los vértices del triángulo después de ser trasladado de acuerdo con el vector indicado. Usa un papel cuadriculado.



a. (−2, 1) (−1, −2) (1, −1)
b. (−2, 0) (−1, −3) (1, −2)
c. (−2, 0) (0, −2) (2, −2)
d. (−2, 0) (0, −3) (2, −2)

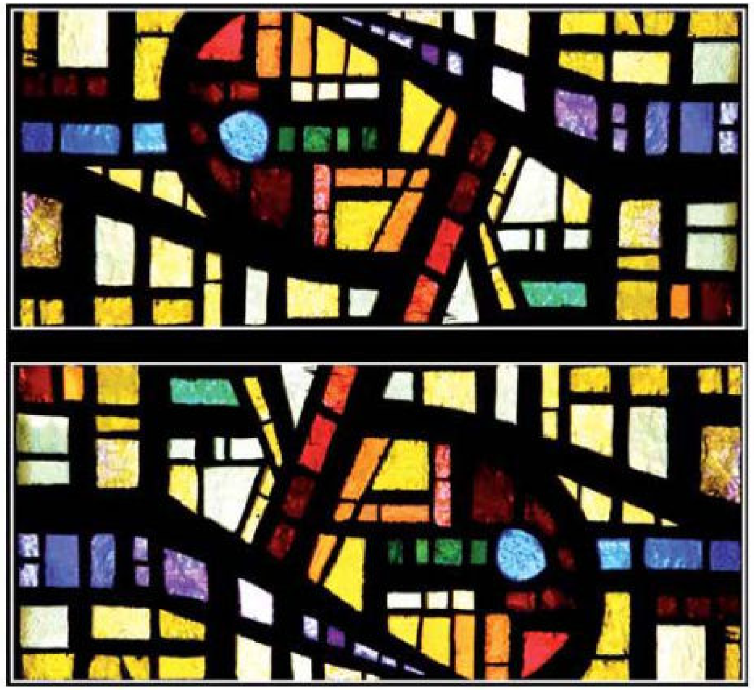
Figuras y cuerpos

Lección **10** **Construirás diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras**

Explora

¿Se parecen?

Observa el siguiente diseño:



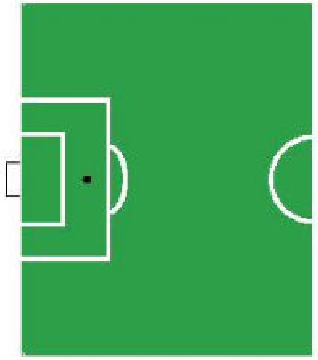
Cantorrales, *Beldad*, vitral, 2012.

1. ¿En qué se parecen la parte superior a la inferior de la imagen?
2. ¿Cómo puedes construir la parte de abajo a partir de la de arriba? Comenta con un compañero.

Descubre y construye

A media cancha

1. Completa la cancha de futbol. Usa regla, compás y lápiz para esta tarea.

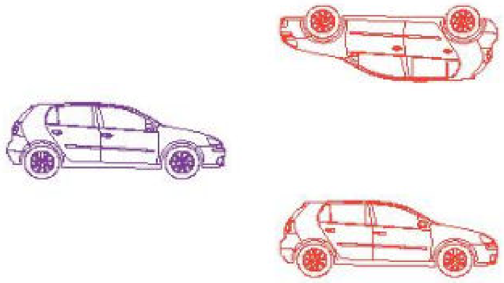


Dibujo de la mitad de una cancha de futbol.

- ¿Cómo construiste la parte de la cancha que faltaba?
- ¿Qué medidas usaste para construir la otra parte de la cancha?
- Corta con cuidado y dobla el dibujo de la cancha por la línea central, ¿coinciden las demás líneas?
- ¿De qué otra forma se puede doblar el dibujo de la cancha de manera que coincidan las demás líneas? Comenta con tus compañeros.

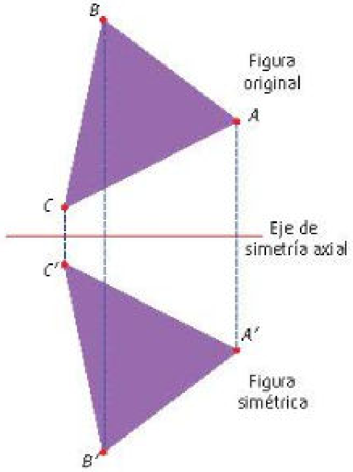
Los coches

Ubica tres puntos diferentes en el coche de la izquierda y nómbralos con las letras *A*, *B* y *C*. Luego, ubica con exactitud los mismos puntos para los coches de la derecha y nómbralos con las letras *A′*, *B′* y *C′*, y *A″*, *B″* y *C″*, respectivamente. Por último, une primero los puntos del coche de la izquierda con los puntos homólogos del coche de arriba y, después con los puntos homólogos del coche de abajo.



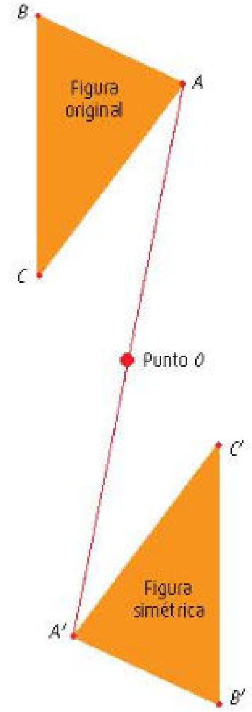
Para tu apunte

El **eje de simetría** es una línea imaginaria que sirve de referencia para relacionar los puntos de una figura con los puntos de otra, de manera que las distancias (perpendiculares) desde este eje a los puntos de la figura original y a los puntos homólogos de la figura simétrica sean iguales. A esta transformación se le llama simetría axial.



Para tu apunte

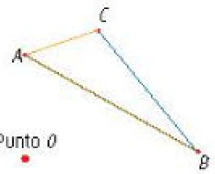
La simetría respecto al punto *O* es una **simetría central** cuyo par de puntos correspondientes (*A*, *A'*) equidistan de *O* (centro de simetría).



1. Responde:
   - ¿Qué características tienen los segmentos obtenidos de la unión de puntos de coche de la izquierda con los puntos homólogos del coche de arriba?
   - ¿Qué características tienen los segmentos obtenidos de la unión de puntos del coche de la izquierda con los puntos homólogos del coche de abajo?
   - Compara tus segmentos con los de tus compañeros. ¿Pasó lo mismo?
   - ¿Cómo es la posición del coche de arriba con respecto al de la izquierda?
   - ¿Cómo es la posición del coche de abajo con respecto al de la izquierda?

• Juguemos con triángulos

1. Construye otro triángulo con simetría central en el punto *O*:



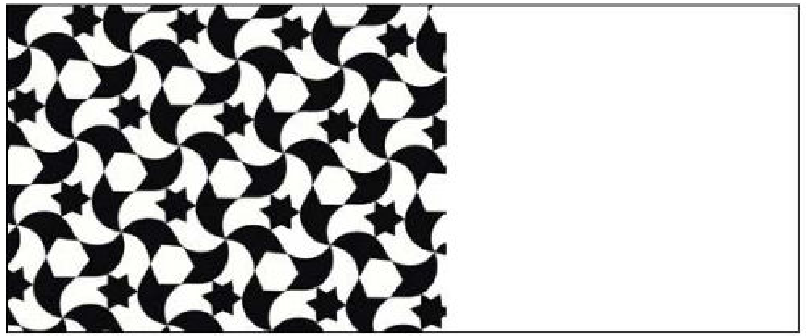
2. Responde:
   - ¿En las figuras con simetría central cambia la forma, el tamaño o la dirección?
   - Compara la simetría central con la simetría axial, la traslación y la rotación. Analiza cuáles se mantienen y cuáles cambian de forma y/o dirección.

• Los diseños de la Alhambra

Como vimos en la lección anterior, en la Alhambra los árabes diseñaron mosaicos geométricos de gran belleza y complejidad en los que las figuras se mueven en el plano de diversas maneras. Aquí te presentamos otros mosaicos:

▲ Los árabes, de acuerdo con sus preceptos religiosos no podían representar seres vivientes en sus creaciones artísticas. Todo su talento y originalidad lo plasmaron en la creación de simetrías, giros y traslaciones.

1. Escribe qué movimientos de traslación, rotación y que tipos de simetrías de las figuras hay en el siguiente diseño:



▲ Una de las figuras que más se repite en los mosaicos de la Alhambra es la pajarita.

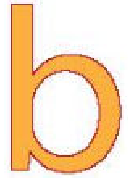
2. Termina el dibujo.
   - ¿Qué figuras se trasladan?, ¿cuántos centímetros se mueven y hacia qué dirección?
   - ¿Qué figuras rotan? ¿Y con respecto a qué punto?

Para tu apunte

Para trasladar una figura se necesitan tres datos: dirección, magnitud y sentido (orientación). Los cuales definen hacia dónde y qué tanto se traslada la figura.

Pongámonos de acuerdo

María está encargada de realizar las letras que se pondrán en el foro de la escuela para la asamblea del próximo mes. Ella ha trazado la siguiente letra:



Para tu apunte

Para rotar una figura se requieren también tres datos: un centro de rotación, un ángulo de rotación y el sentido (orientación).

1. Reunidos en parejas respondan:
   - ¿Qué tipo de movimiento o qué tipo de simetría debe aplicar a la letra "b", si desea trazar ahora la letra "d"?
   - Una vez trazada la letra "d", María aplica simetría central respecto a un punto, tal como se muestra abajo, ¿qué letra obtiene?

   - Finalmente, María quiere trazar la letra "q". Tomando alguna de las letras obtenidas anteriormente apliquen algún movimiento o alguna simetría. Indiquen el punto de referencia o el eje de simetría que usaron para trazar la letra "q". Comenten con sus compañeros lo que hicieron.

De vuelta al Explora

¿Se parecen?

Después de haber analizado las características de los movimientos de traslación y rotación, así como las de la simetría axial y central, compara la parte de arriba con la de abajo de la imagen del EXPLORA y da una explicación de cómo se puede construir una con respecto a la otra.

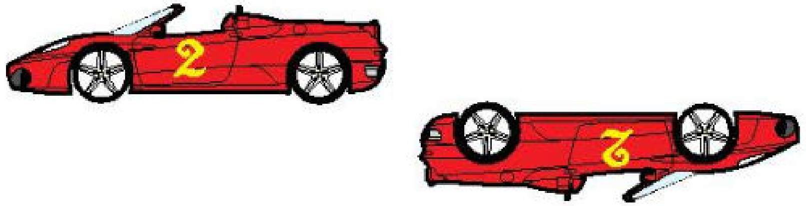
Indica el eje de simetría o punto *O* simétrico según sea el caso.

Practica

1. Traza con un color el o los ejes de simetría en las siguientes imágenes.
   - Algunas imágenes tienen también simetría central, ¿cuáles son?

a) Nervadura de una hoja con gota de agua. b) Sección de un vitral en el Antiguo Colegio de San Ildefonso, Ciudad de México. c) Niña tehuana en la Guelaguetza, Oaxaca. d) Monte Hood, Oregon, Estados Unidos. e) Pirámide de Kukulcán, Chichén Itzá, Yucatán.

2. Las siguientes imágenes tienen simetría central. Encuentra el punto *O* de referencia en cada una.



3. Construye dos figuras como la siguiente. Utiliza para una el eje de simetría dado y para la otra, el punto *O* indicado.

4. Construye la siguiente figura 180° con respecto al punto dado.

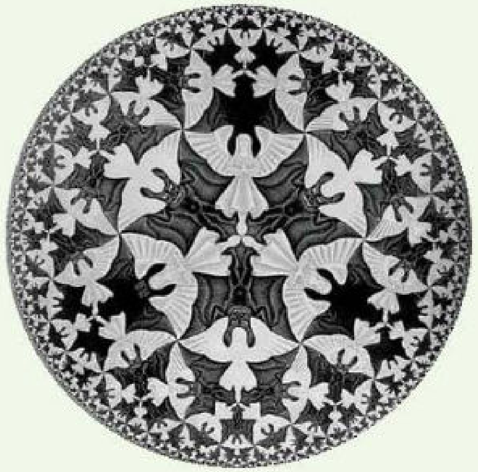
5. ¿Es lo mismo aplicar simetría central y la rotación a 180°? Explica.

6. Traslada la siguiente figura 5 centímetros a la derecha.

Evalúa tu avance

1. Aplicar simetría central en una figura con respecto a un punto es equivalente a:
   a. Colocar un eje de simetría debajo de la figura y trazarla.
   b. Rotar a 90° la figura con respecto al mismo punto.
   c. Rotar a 180° la figura con respecto al mismo punto.
   d. Desplazar verticalmente cada uno de los puntos de la figura hacia abajo.

2. Elige la opción que sea verdadera respecto de la siguiente imagen:



Límite circular IV, M. C. Escher, 1960.

   a. Las figuras principales están rotadas 120° respecto al centro del círculo.
   b. Las figuras principales están en simetría central.
   c. Las figuras principales están trasladadas a la izquierda y derecha.
   d. Las figuras principales tienen un eje de simetría horizontal.

Medida

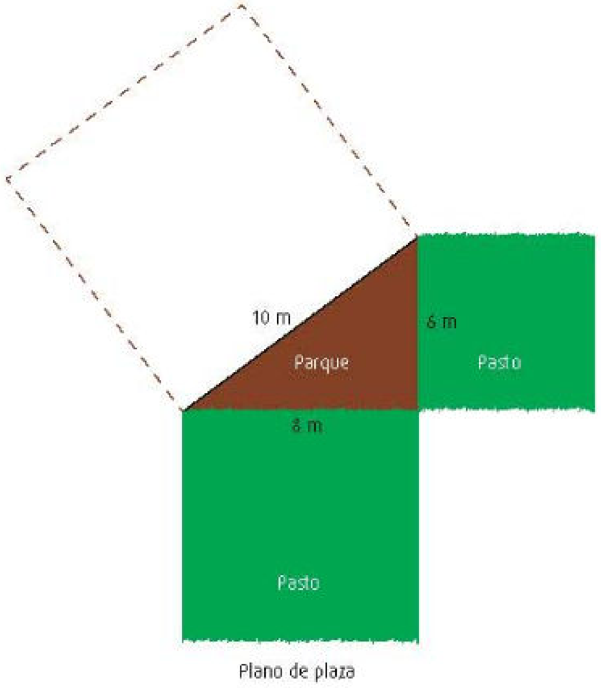
Lección 11

Analizarás las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo

Explora

La plaza

Junto a una plaza que tiene forma de triángulo rectángulo hay dos jardines cuadrados con pasto, uno adyacente al cateto de la plaza, que mide 6 metros, y otro adyacente al cateto que mide 8 m. Para tener un área de pasto más grande los vecinos quieren recolocar el pasto de esos dos jardines en un cuadrado que está pegado a la hipotenusa del triángulo.



Plano de la plaza.

Es condición necesaria utilizar el mismo pasto de los parques existentes en el área que se indica en la sección punteada del dibujo superior. De acuerdo con esto responde:

- ¿Caben los dos cuadrados de pasto originales en el cuadrado punteado?
- ¿Cómo recortarías el pasto existente para moverlo?
- ¿Qué relación hay entre las dos áreas iniciales de pasto y la nueva área?
- ¿Hay diferentes maneras de hacer los recortes de pasto para que cubran el cuadrado adyacente a la hipotenusa?

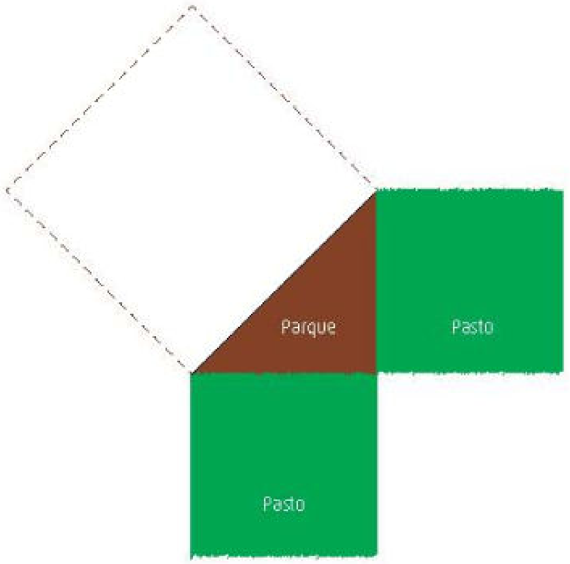
Descubre y construye

• Parecido pero diferente

Para tu apunte

En un triángulo rectángulo los lados adyacentes al ángulo de 90º reciben el nombre de **catetos** y el lado sobrante, opuesto al ángulo recto, se le llama **hipotenusa**.

En otra plaza también se requiere mover los pedazos de pasto indicados en la figura al área que aparece punteada; sólo que en este caso la plaza tiene forma de triángulo rectángulo isósceles.

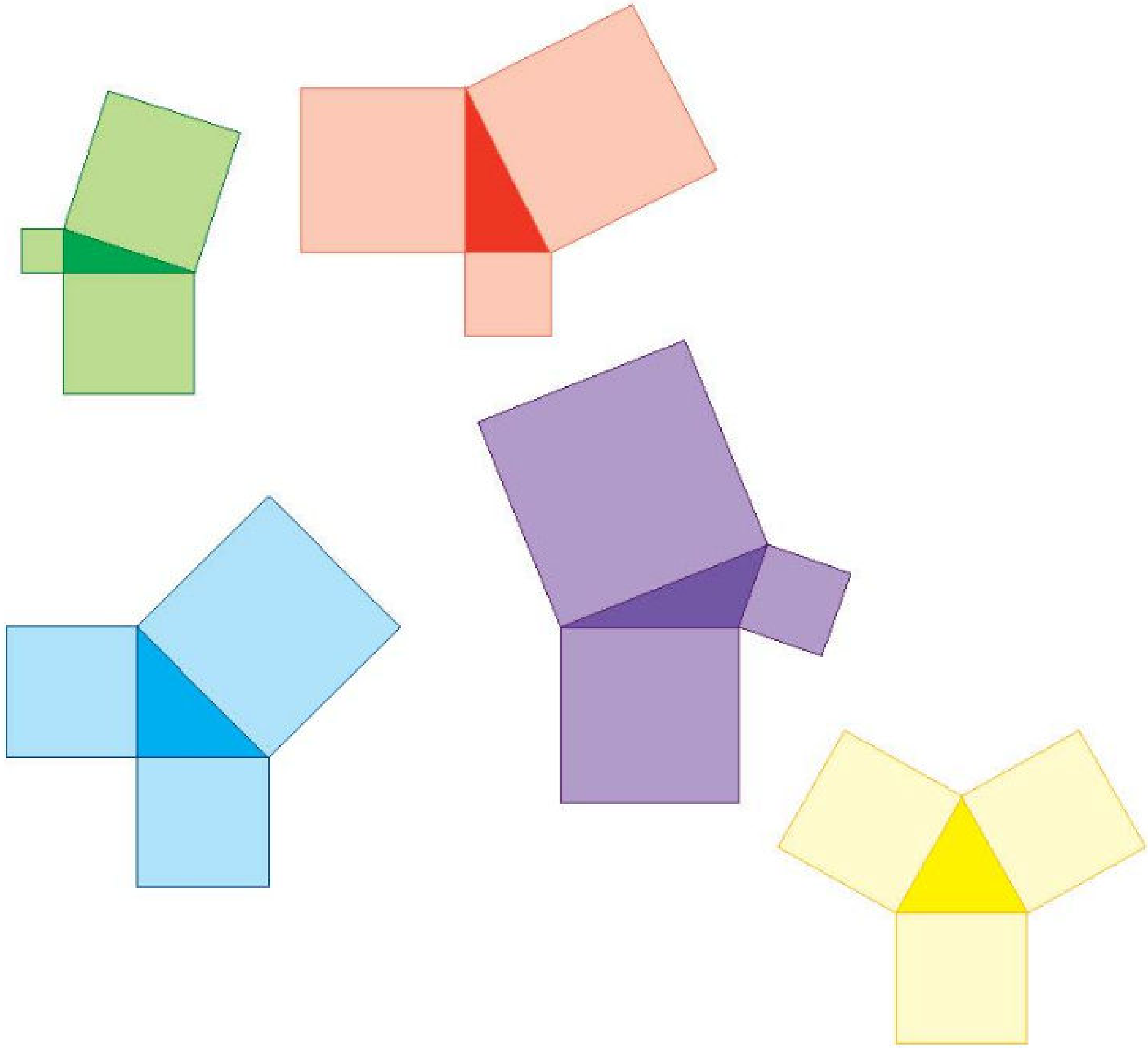


▲ Plano de la segunda plaza.

1. Responde:
   - ¿Se puede hacer recortes de los dos pedazos de pasto y trasladarlos al cuadrado punteado de tal manera que no sobre espacio?
   - Describe tu procedimiento y compáralo con otros compañeros.
   - ¿Cuántas veces cabe el área del cuadrado asociado a un cateto en el cuadrado asociado a la hipotenusa del triángulo rectángulo isósceles?

• Las áreas de los cuadrados

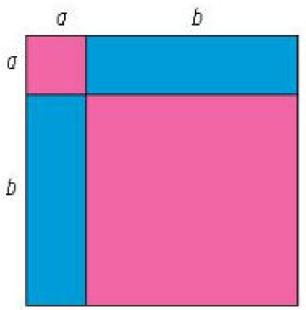
Mide los lados de los siguientes triángulos y calcula el área de los cuadrados adyacentes a cada uno de sus lados. Anota cuál es el tipo de triángulo en cada caso.

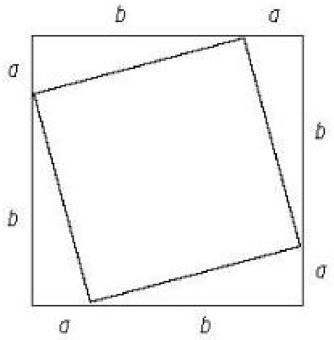


1. Responde:
   - ¿Encuentras alguna relación entre las tres áreas calculadas en cada triángulo? Menciona cuál o cuáles relaciones encontraste.
   - ¿Qué tipos de triángulos hay?
   - ¿Cómo son las tres áreas de los cuadrados que están alrededor del triángulo equilátero?
   - ¿Pasa lo mismo para las áreas de los cuadrados de los demás triángulos?
   - ¿Qué relación tienen las áreas cuadradas de los lados de estos triángulos?, ¿en todos los casos? ¿En qué tipo de triángulos se presenta esta relación?

Pongámonos de acuerdo

Reunidos en parejas observen detenidamente los dos cuadrados siguientes y respondan las preguntas planteadas:





- ¿Pueden colorear las secciones del cuadrado derecho de manera correspondiente con las áreas de las secciones del cuadrado izquierdo?
- ¿La figura que queda en el centro del lado derecho es un cuadrado?
- Anoten la expresión algebraica que denota el área para cada sección de ambos cuadrados. Si encuentran algún lado que no tenga nombre, pónganselo.
- Comparen la expresión algebraica haciendo una igualdad entre estas dos y redúzcanla con ayuda de su maestro.
- ¿Qué resultado obtuvieron?
- Comenten sus resultados con el resto del grupo para ponerse de acuerdo en el resultado así obtenido.

De vuelta al Explora

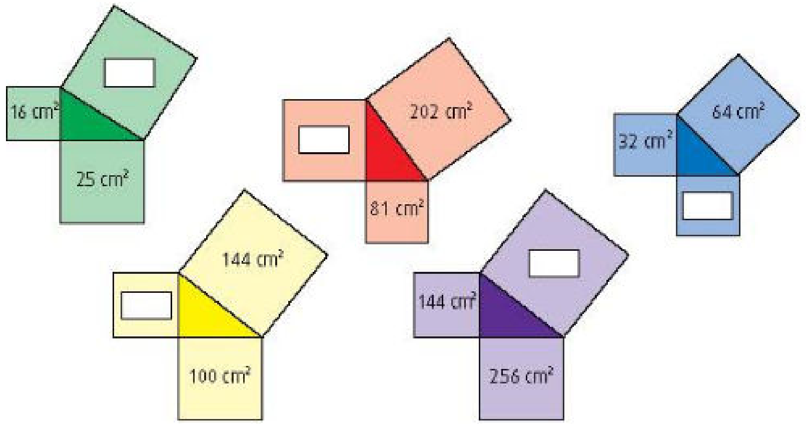
Reunidos en parejas sigan las siguientes instrucciones:

1. En una hoja blanca dibujen tres triángulos rectángulos de cualquier tamaño.
2. Dibujen los cuadrados asociados a cada lado.
3. Localicen el cuadrado más grande de algún cateto.
4. Localicen el centro de ese cuadrado.
5. Tracen dos rectas que pasen por ese centro, una que sea paralela a la hipotenusa del triángulo y otra que sea perpendicular a ella.
6. Al hacer esto, el cuadrado de un cateto quedará dividido en cuatro pedazos. Recórtenlos.
7. Recorten el cuadrado asociado al otro cateto y acomódenlo, junto con las cuatro piezas del punto anterior, en el cuadrado asociado a la hipotenusa.

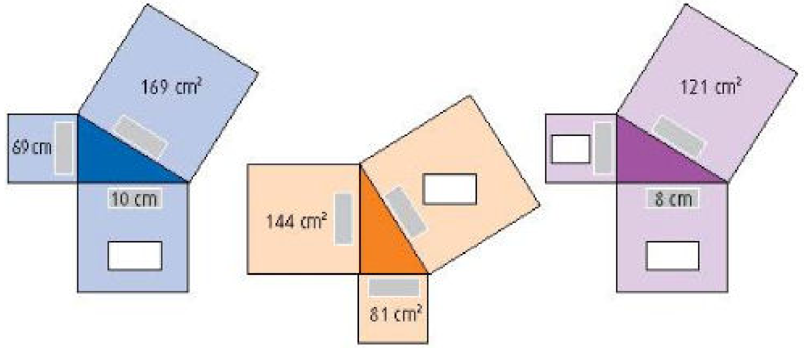
8. Ahora respondan:
   - ¿Lograron colocar las cinco piezas en el cuadrado asociado a la hipotenusa en todos los casos?
   - ¿Las instrucciones funcionaron para todos los triángulos rectángulos? ¿Por qué sí o por qué no?
   - Si esto funciona para todos los triángulos rectángulos, ¿pueden utilizar esta estrategia en los problemas del desarrollo?

Practica

1. A continuación se muestran cinco figuras. En cada una se incluyen los valores de las áreas de dos de los cuadrados asociados a los lados. Calcula el área del tercer cuadrado para cada triángulo rectángulo.



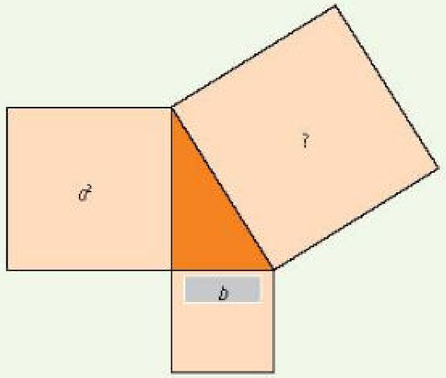
2. En las tres figuras siguientes, calcula los lados del triángulo y las áreas de los cuadrados faltantes.



3. Plantea un problema que utilice todo lo aprendido en esta lección. Compártelo con un compañero y pídele que lo resuelva.

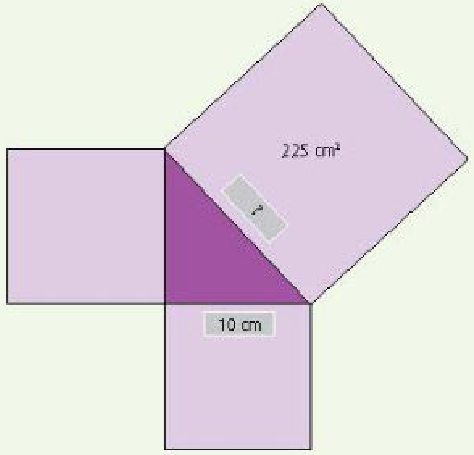
Evalúa tu avance

1. A partir de la información mostrada en la siguiente figura, indica cuál es el área del cuadrado correspondiente a la longitud de la hipotenusa.



a. b^2
b. $a^2 - b^2$
c. $a + b$
d. $a^2 + b^2$

2. Con base en los datos establecidos en la figura, ¿cuál es la longitud de la hipotenusa del triángulo?



a. 10.5 cm
b. 12 cm
c. 11.18 cm
d. 15 cm

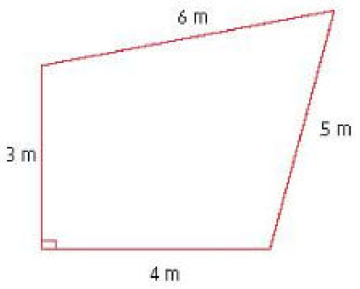
Medida

Lección 12 Explicitarás y usarás el teorema de Pitágoras

Explora

El terreno irregular

El impuesto que se paga por tener alguna propiedad se llama impuesto predial. Su cobro depende de los metros cuadrados que tenga el terreno. Si el terreno de Don Javier tiene la siguiente forma:



- ¿Cuál es el área total del terreno por el que tendrá que pagar?

Descubre y construye

- La escalera

Montserrat quiere saber cuánto mide una escalera que está apoyada sobre una pared. Sabe que la parte baja de la escalera está separada 1.80 metros de la pared, mientras que la parte alta llega hasta una altura de 6 metros de ésta. Con esta información dibuja un diagrama de la situación planteada y escribe los datos conocidos.

1. Calcula la longitud de la escalera.
   - ¿Cómo calculaste la longitud de la escalera? Comenta con tus compañeros tu procedimiento y compáralo con el de los demás.
   - ¿Cuánto mide el área del cuadrado con lado igual a la escalera? ¿Cómo obtuviste su valor?

2. Si movemos la parte baja de la escalera de 1.80 metros a 2 metros de la pared, ¿a qué altura de la pared llega la escalera?
   - ¿A qué distancia de la pared tendrías que poner la escalera para llegar a 4 metros de altura?

• Proyecto de Ciencias

Para un proyecto de la clase de Ciencias, los alumnos de la escuela "Miguel Hidalgo" hicieron volar un avión de aeromodelismo. Al hacer el despegue con cierto ángulo de inclinación, el avión siguió una trayectoria recta de 24 metros y se separó horizontalmente 15 metros desde el punto de despegue.

1. Realiza un diagrama que ilustre los datos anteriores.
   - ¿Qué altura alcanzó el avión de los estudiantes al llegar a los 24 metros de la trayectoria?

• Recorrido extremo

Desde la punta más alta del cerro de la Silla, en Monterrey, Nuevo León, Salvador se desliza sobre una tirolesa hasta alcanzar otra punta del cerro que está 50 metros más abajo. Si la distancia horizontal entre las dos puntas es de 145 metros:

1. Construye un diagrama que te permita visualizar la trayectoria de Salvador por la tirolesa.
   - ¿Qué distancia recorrió Salvador por la tirolesa?

Para tu apunte

El **Teorema de Pitágoras** se aplica para encontrar la longitud de cualquier lado de un triángulo rectángulo si se conocen los otros dos.

Para encontrar la hipotenusa se realiza la siguiente operación:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

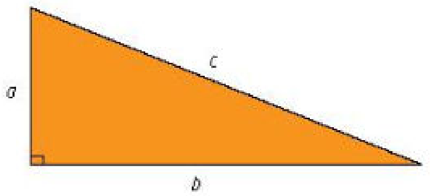
Para encontrar algún cateto se hacen las siguientes operaciones:

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} \quad \text{o} \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Pongámonos de acuerdo

1. Con el trabajo que han realizado completen el siguiente enunciado:
   - En todo triángulo rectángulo se cumple que la hipotenusa (lado más largo del triángulo rectángulo) al cuadrado es igual a ______________________________.

2. Dado el siguiente triángulo rectángulo, lo que antes escribieron puede expresarse así:



$c^2 =$ __________

   - Donde a y b son los catetos y c es la hipotenusa.

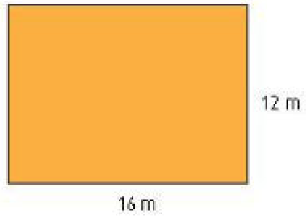
De vuelta al Explora

1. Analicen nuevamente la forma del terreno del EXPLORA y respondan:
   - ¿Pueden encontrar triángulos rectángulos dentro del terreno?
2. Encuentren la longitud de los catetos de los triángulos rectángulos localizados en el terreno y calculen sus áreas.
   - ¿Cuál es el área total del terreno?

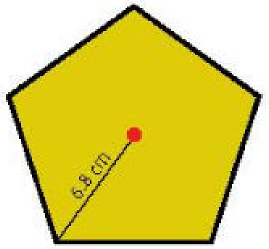
Practica

1. En cada triángulo, calcula la longitud del lado que se indica.

2. Encuentra el área del círculo circunscrito al rectángulo siguiente:



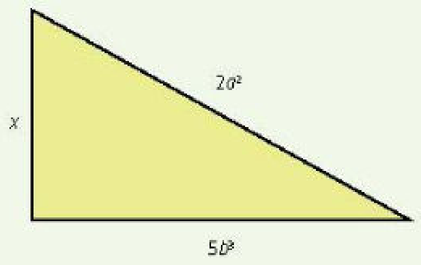
3. Encuentra el área de un pentágono regular cuyo lado mide 8 centímetros y el radio 6.8 cm.



4. Un poste de luz eléctrica está sujeto al suelo por medio de unos tirantes de acero. Si uno de estos tirantes mide 30 metros de largo y está anclado a 15 metros de distancia de la base del poste, ¿cuál es la altura del poste?

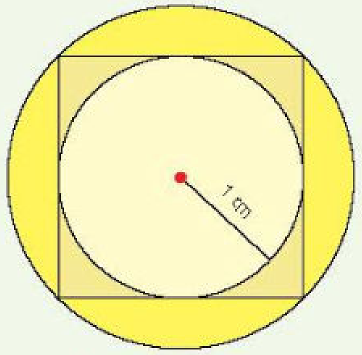
Evalúa tu avance

1. ¿Cuál es el valor de x en la siguiente figura?



a. $(2a^2 - 5b^3)^2$
b. $4a^2 - 25b^6$
c. $\sqrt{4a^4 - 25b^6}$
d. $a^4 - b^6$

2. Un círculo de 1 cm de radio está inscrito en un cuadrado que a su vez está inscrito en otro círculo. ¿Cuántos centímetros mide el radio del círculo exterior?



a. 2
b. $\sqrt{2}$
c. 1
d. $\sqrt{3}$
e. 0.5

Nociones de probabilidad

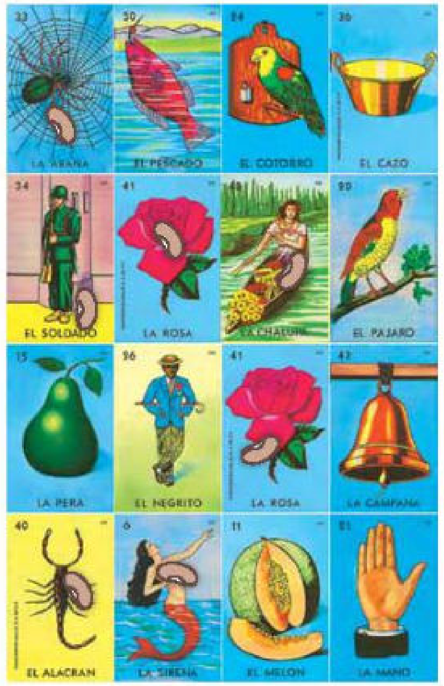
Lección 13

Calcularás la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma)

Explora

¡Chalupa... y lotería!

La familia Martínez se reúne para jugar lotería todos los domingos. La tía Sandra tiene la jugada tal como se muestra en el siguiente dibujo:



Tablero con 16 copias reducidas de las 54 cartas de la actual lotería tradicional mexicana. La primera edición se imprimió industrialmente en 1887.

Si aún quedan 40 cartas por tirar:

- ¿Cuál es la probabilidad de que la tía Sandra gane con la siguiente carta?

Descubre y construye

• Los dados y el uno

Al tirar un dado ¿cuál es el suceso complementario a tirar un múltiplo de tres en el dado?

- ¿Cuál es la probabilidad de tirar un tres?
- ¿Cuál es la probabilidad de tirar el suceso complementario a tirar un tres en el dado?
- ¿Cuánto vale la suma de las dos probabilidades que acabas de obtener?
- ¿Por qué crees que suceda esto?
- ¿En qué tipo de situaciones de la vida real las probabilidades sumadas dan uno?

Para tu apunte

Cuando dos eventos son mutuamente excluyentes, la probabilidad de que ocurre un evento u otro es igual a la suma de las probabilidades individuales de cada evento.

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$$

Cuando dos eventos son mutuamente excluyentes pero además la suma de las probabilidad es uno, se les llama eventos complementarios.

• El librero

En un librero hay varios libros de reconocidos matemáticos de distintas épocas. Cuatro son de Euclides, tres de Hipatia, dos de Euler y uno de Gauss, ¿cuál es la probabilidad de elegir:

- un libro al azar y que sea de Euclides?
- un libro al azar y que sea de Hipatia?
- un libro al azar y que sea de Euler?
- un libro al azar y que sea de Gauss?
- al azar un libro de Euclides o de Euler?
- al azar un libro de Hipatia o Gauss?
- un libro al azar de Hipatia, Euler o Gauss?
- un libro al azar de Euclides, Hipatia, Euler o Gauss?

- ¿Por qué ha salido este último resultado?
- ¿Cuál es la suma de las probabilidades de que salga cada uno de los autores en eventos separados?
- ¿En qué tipo de situaciones de la vida real las probabilidades sumadas dan uno?

Pongámonos de acuerdo

En una urna hay ocho dulces, cinco de fresa y tres de mango. En la misma urna hay también 12 chicles, cuatro de fresa y ocho de mango.

1. Junto con un compañero calcula cuál es la probabilidad de que al extraer una golosina al azar, ésta sea:
   - Un chicle de fresa.
   - Un dulce de fresa.
   - Un chicle de fresa o un dulce de fresa.

   - Un dulce de mango.
   - Un chicle de mango.
   - Un chicle de mango o un dulce de mango.
   - Un chicle.
   - Un dulce.
   - Un dulce de fresa o un chicle de mango.
2. Expliquen si al obtener un chicle y después un dulce los eventos son mutuamente excluyentes, ¿también son complementarios?
3. Los eventos de obtener un chicle de fresa y luego un dulce de fresa, ¿son mutuamente excluyentes?, ¿y son complementarios? Expliquen.
4. Escriban otros eventos que sean mutuamente excluyentes.

Para tu apunte

Como se dijo en lecciones anteriores, las probabilidades de eventos pueden ser expresadas en fracción, decimal o porcentaje. Una ventaja de emplear fracciones es que es más exacta, mientras que con los decimales y porcentajes, no todas las divisiones que se hacen para obtenerlos son decimales finitos. Sin embargo, es común usar los porcentajes para comunicar información.

De vuelta al Explora

En el problema de la lotería, ¿qué elementos tienen para describir la situación como eventos excluyentes y/o complementarios?

1. Calcula la probabilidad para que con la siguiente carta la tía Sandra gane:
   a. De forma vertical.
   b. De forma horizontal.
   c. En cuadro chico.
   d. De forma diagonal.
   e. De cualquier forma.
   f. No gane de ninguna forma.
2. De los anteriores, menciona dos eventos que sean complementarios.
3. De los anteriores, menciona dos eventos que sólo sean mutuamente excluyentes.

La lotería es muy representativa del diseño gráfico popular mexicano, contiene una baraja con 54 cartas.

Practica

1. ¿Son mutuamente excluyentes los siguientes sucesos?
   a. Lanzar un dado y que salga un 2 y lanzar otro dado y que salga un 4.
   b. Tirar una moneda y que caiga águila, y tirarla de nuevo y que caiga un sol.
   c. Obtener un 3, 4 y 6 en el dado, y obtener un 1, 2 y 5.
      ⇒ Explica por qué sí o por qué no son mutuamente excluyentes cada uno de los incisos.
2. ¿Cuál es la probabilidad de sacar el diez de tréboles o cuatro de corazones en una baraja inglesa?

En el problema de la lotería, ¿qué elementos tienen para describir la situación como eventos excluyentes y/o complementarios?

Evalúa tu avance

1. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un múltiplo de 2 o un 1 en el dado?

   a. 1

   b. $\frac{1}{2}$

   c. $\frac{2}{3}$

   d. $\frac{1}{3}$

2. En una urna hay 5 pelotas amarillas, 4 rojas, 3 azules, 6 verdes, 2 naranjas y 1 morada. ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar una pelota al azar sea amarilla o verde?

   a. $\frac{10}{21}$

   b. $\frac{6}{11}$

   c. $\frac{5}{21}$

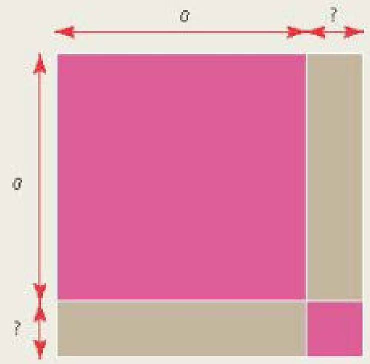
   d. $\frac{11}{21}$

Evaluemos lo aprendido

✓ Evaluación tipo Planea

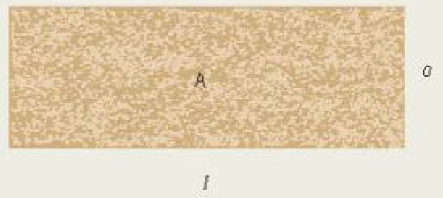
Subraya la opción que consideres correcta y, al terminar, con la guía del maestro, revisa en grupo tus respuestas.

1. El área del siguiente cuadrado está representado por la expresión algebraica $(a^2 + 28a + 196)\ u^2$.
   - ¿Cuál es el número que falta en la figura para completar el valor del lado del cuadrado?



   a. 28 u
   b. 14 u
   c. 196 u
   d. 16 u

2. El papá de Emanuel pretende comprar un terreno para construir un local comercial, pero sólo sabe que el largo del terreno es 7 m mayor que el ancho y que su superficie total es de 120 m². Le pide a su hijo que lo ayude a conocer las medidas del terreno y saber si tendrá las dimensiones adecuadas para su proyecto de negocio.
   - ¿Cuál es la ecuación que debe modelar Emanuel para ayudar a su papá y cuáles son las dimensiones del terreno que obtendrá una vez que la resuelva?



   a. $x^2 - 7x - 120 = 0$; largo = 12 m, ancho = 10 m.
   b. $x^2 - 7x + 120 = 0$; largo = 20 m, ancho = 6 m.
   c. $x^2 + 7x - 120 = 0$; largo = 15 m, ancho = 8 m.
   d. $x^2 + 7x + 120 = 0$; largo = 8 m, ancho = 15 m.

3. Efraín llevó a clase unas fotos que tomó durante sus vacaciones el verano anterior para mostrárselas a sus compañeros; casualmente, ese mismo día terminaron de ver el tema de transformaciones en el plano. Al observar con detenimiento la siguiente fotografía que tomó bajo una antena de alta tensión, se dio cuenta de que en ella no se manifiesta sólo una de las cuatro diferentes transformaciones que recién aprendió.
   - ¿De cuál de ellas estamos hablando?

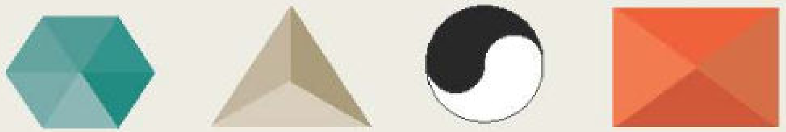
Las líneas de alta tensión transportan la energía eléctrica a grandes distancias.

   a. Traslación.
   b. Simetría central.
   c. Simetría axial.
   d. Rotación.

4. Cierto día en clase de artes, Andrea realizó el siguiente dibujo, el cual fascinó al maestro a tal grado que le pidió lo mostrara durante la exhibición bimestral que llevaría a cabo en el plantel; durante la exposición, el maestro de matemáticas de Andrea se acercó a ella para comentarle sobre su dibujo, al observar claramente que había utilizado lo visto en clase en el tema de transformaciones en el plano para llevarlo a cabo. Andrea le contesta que, en efecto, se inspiró en ellas para realizar su composición.
   - ¿Qué transformaciones son las que utilizó Andrea para realizar su obra?

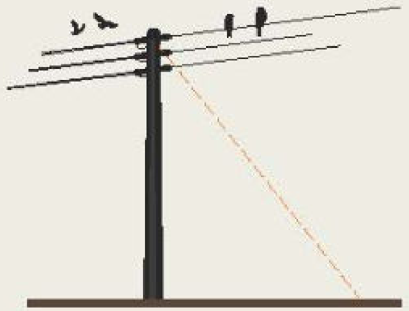
   a. Traslación y rotación.
   b. Simetría central y traslación.
   c. Simetría axial y rotación.
   d. Rotación y simetría central.

5. Durante el último examen parcial sobre el tema de transformaciones en el plano, Fernanda invirtió mucho tiempo para contestar la siguiente pregunta: ¿cuál de las siguientes figuras no presenta simetría central? Aunque se tardó en responder, respondió correctamente. Si tú presentaras ese mismo examen.
   - ¿Cuál respuesta hubieses elegido para, como Fernanda, también acertar a la pregunta?



a b c d

6. El padre de Laura trabaja para una compañía de televisión por cable; su trabajo consiste en revisar que todos los postes portadores de antenas retransmisoras se encuentren en óptimas condiciones para prevenir cualquier desperfecto. Al realizar un recorrido por una colonia, observó que un poste se estaba venciendo hacia un costado; hizo un esquema como el siguiente para ilustrar la situación y encontrarle una solución. Resolvió colocar un cable de tensión para asegurarlo y evitar algún accidente. Si la altura a la cual será sujetado el cable sobre el poste es de 5.7 m y la separación entre la base del poste y la zona de anclaje es de 2.4 m.
   - ¿Cuál deberá ser la longitud del cable para que se mantenga tenso?

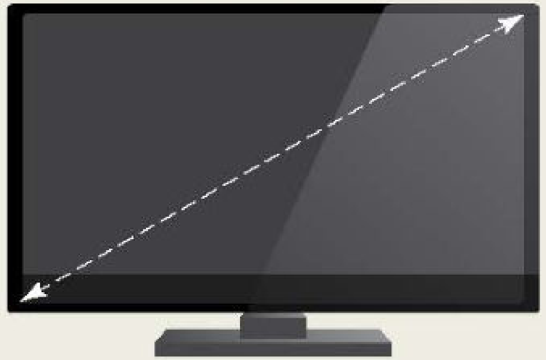


   a. 6.18 m.
   b. 8.10 m.
   c. 38.25 m.
   d. 6.25 m.

7. Alondra y su hermana Yaresi visitaron una tienda departamental en compañía de sus padres con la intención de comprar un televisor para su recámara. Piensan colocar el aparato en un mueble que hay en la habitación, en un espacio cuadrangular de 65 cm por lado. Tras mirar los aparadores, se deciden por un modelo de pantalla plana de 32 pulgadas (que es la medida diagonal de la pantalla), aunque tiene 2 pulgadas más sobre la diagonal considerando su marco.

Si la altura de la pantalla (sin contar los 10 cm de separación con la base) es de 21 pulgadas y se ha calculado la medida del largo de su base, entonces.

- ¿Es adecuado comprar este aparato para la habitación de las hermanas? (Pista: 1 pulgada = 2.54 cm)

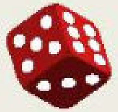


A mayor tamaño de la pantalla, mayor será la distancia a la que tendremos que ubicarnos para disfrutar de una calidad de imagen óptima.

a. No, porque la altura total de la televisión mide 66.3 cm, que es más del espacio disponible.
b. Sí, porque el largo de la base mide 63.3 cm, que es menos del espacio disponible en el mueble.
c. No, porque el largo de la base mide 67.9 cm, que es más del espacio disponible en el mueble.
d. Sí, porque el largo de la base mide 67.9 cm, que es menos del espacio disponible en el mueble.

8. Diego y Jesús juegan a adivinar lo que caerá en el lanzamiento de una moneda y un dado; tras varios intentos e ir empatados en victorias, ganará el juego aquel que acierte al resultado de la moneda o al del dado. Al tomar sus opciones, Diego elige la caída de un sol en la moneda o del número 3 en el dado, pero no acertó a ninguno; entonces, Jesús toma como opciones la caída de un águila en la moneda o del número 6 en el dado.
   - ¿Cuál es la probabilidad de que Jesús pueda ganar esta partida con Diego y por lo tanto el duelo?

a. $\frac{1}{2}$ b. $\frac{1}{6}$



c. $\frac{1}{12}$ d. $\frac{2}{3}$

✓ Evaluación tipo PISA

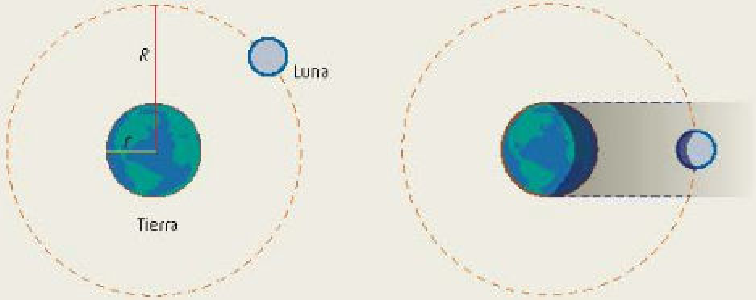
Aristarco y el diámetro de la Luna

Hace unos 2 300 años, con el uso de rudimentarios instrumentos, pero con un asombroso ingenio, el astrónomo griego Aristarco de Samos calculó la distancia que hay entre la Tierra y la Luna, así como el diámetro lunar. Para realizar su cálculo requirió que se presentara un eclipse lunar.

Su razonamiento fue como sigue:

Sabemos que la Luna gira en una órbita circular de radio desconocido con respecto a la Tierra; llamemos R a ese radio. Cada mes lunar (27 días) completa una revolución sobre esta órbita.

Durante un eclipse lunar, la Tierra proyecta una sombra que supondremos tiene longitud R también, que es la sombra que oscurece a la Luna. Para ese entonces, Eratóstenes ya había calculado el radio aproximado de la Tierra: 6 300 km, por lo que en los eclipses lunares de mayor duración la Luna recorre 12 600 km de sombra, suponiendo que la sombra proyectada por la Tierra sobre la Luna es cilíndrica.



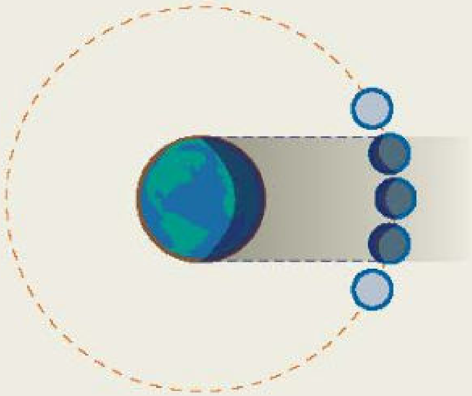
Si durante un eclipse largo el periodo de sombra de la Luna es de unas 2.5 horas, y si suponemos que la Luna viaja a velocidad constante, entonces obtenemos la siguiente relación:

$$\frac{\text{Circunferencia de órbita lunar}}{\text{Sombra terrestre}} = \frac{\text{Mes lunar}}{\text{Periodo de sombra}}$$

Donde la circunferencia de la órbita lunar está dada por $2\pi R$, la sombra terrestre por $2r$, y los valores de un mes lunar y periodo de sombra ya han sido dados; con base en esta información:

1. Estima, de forma similar a como lo hiciera Aristarco, el valor de la distancia que separa a la Tierra y la Luna (radio de la órbita lunar) a partir de la relación antes dada.
2. Investiga el valor actual establecido como la distancia entre la Tierra y la Luna.
   - ¿Es una buena aproximación la obtenida anteriormente?
   - ¿A qué se debe?

Como ya vimos anteriormente, la Luna, en su movimiento a través de su órbita durante un eclipse largo, tarda hasta 2.5 horas en salir por completo de la sombra:



3. Considerando la figura anterior como la representación del movimiento de un objeto sobre un plano.
   - ¿A cuál tipo de movimiento se referirá el paso de la Luna en su órbita a través de la sombra durante un eclipse?
     ⇒ Explica.
4. Si en 27 días la Luna da una vuelta completa alrededor de la Tierra sobre su órbita, lo que significa que se desplaza 360° con respecto al centro de la Tierra:
   - ¿Cuál es el desplazamiento angular de la Luna para atravesar la zona oscura durante un eclipse largo?

Con la ayuda de la tecnología, que en los tiempos de Aristarco no se tenía, hoy es posible realizar mediciones mucho más precisas, así como tener información más cercana a lo real gracias a las imágenes que transmiten las sondas espaciales, las estaciones de monitoreo espacial y los telescopios modernos. Aún así, las habilidades y recursos que los grandes pensadores griegos, como Eratóstenes o Aristarco entre muchos más, nos revelan, no dejan de impresionarnos.

En la actualidad los observatorios astronómicos, como el de California, se construyen en lugares que poseen clima y condiciones apropiadas para la observación de los cuerpos celestes.

La cancha de futbol en el patio

En la secundaria número 13 hay un campo verde en el patio que se pretende usar para trazar una cancha de futbol para el torneo interno de la misma; se encargó a Oziel y Gabriel la tarea de organizar a su grupo y llevarlo a cabo.

Debido al espacio disponible, no se puede construir una cancha con las medidas oficiales, así que toman las siguientes consideraciones: la cancha es un rectángulo formado por dos cuadrados unidos por uno de sus lados, al cual se le conoce como "media cancha"; el área total sobre la cual se trazará es de 288 m^2.

1. Con base en la información proporcionada, calcula cuáles serán las dimensiones de la cancha.
2. Una vez decididas las dimensiones de la cancha, se disponen a marcarla sobre el campo. Para ello cuentan únicamente con cinta métrica para realizar las mediciones, y con cal, la cual verterán sobre la cancha para hacer las marcas. Al terminar de hacerlo, Yadira se pregunta si el "rectángulo" recién trazado cumpliría con la condición de tener sus ángulos rectos.
   - ¿Cómo podrían verificarlo si cuentan únicamente con la cinta métrica?
3. Lista la cancha, ¡llegó la hora de jugar! Oziel está en el grupo D de tercer año, el cual tiene 30 alumnos: 15 mujeres y 15 hombres. Se organizan cuatro equipos de siete personas, dos de ellos son únicamente de chicas y dos más de chicos, además el niño y la niña restante fungirán como árbitro durante el partido que le corresponda. Se elige al azar quién será el árbitro y a qué equipo pertenecerá cada uno de los alumnos restantes.
   - ¿Cuál es la probabilidad de que Gabriel sea el árbitro del partido o que pertenezca al equipo azul?
   - ¿Cuál es la probabilidad de que Yadira juegue para el equipo verde o para el equipo morado?
4. ¿Qué es más probable que le ocurra a Oziel?
   - ¿Qué sea elegido para jugar con alguno de los dos equipos o que sea el árbitro del partido?
     ⇒ Justifícalo por medio de cálculos.

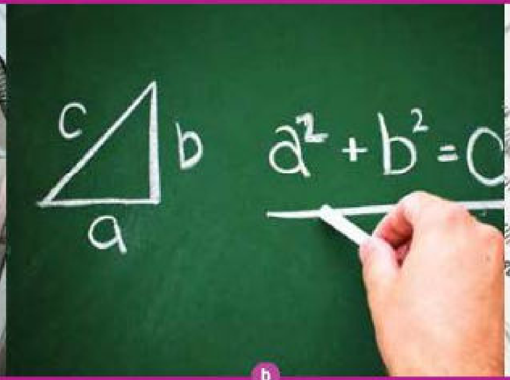
BLOQUE 3

B3

COMPETENCIAS

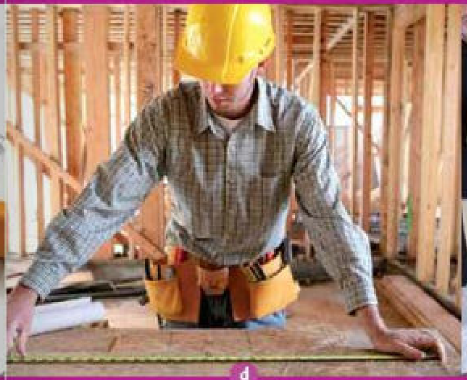
- Resolver problemas de manera autónoma.
- Comunicar información matemática.
- Validar procedimientos y resultados.
- Manejar técnicas eficientemente.


a



b


c


d


e


f

APRENDIZAJES	EJES	SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO	FORMA, ESPACIO Y MEDIDA	MANEJO DE LA INFORMACIÓN
• Resolverás problemas que implican el uso de ecuaciones de segundo grado. • Resolverás problemas de congruencia y semejanza que implican utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier figura.	TEMAS Y LECCIONES	**Patrones y ecuaciones** L14 Resolverás problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas y aplicarás la fórmula general para resolver dichas ecuaciones.	**Figuras y cuerpos** L15 Aplicarás los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas.	**Proporcionalidad y funciones** L18 Leerás y construirás gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos.
			L16 Resolverás problemas geométricos mediante el teorema de Tales.	L19 Leerás y construirás gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.
			L17 Aplicarás la semejanza en la construcción de figuras homotéticas.	**Nociones de probabilidad** L20 Calcularás la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto).

a. Para diseñar edificios como éste, los arquitectos realizan cálculos matemáticos: vista interior de los pisos de un edificio desde el vestíbulo.

b. En el teorema de Pitágoras se relacionan los tres lados de un triángulo rectángulo.

c. Los instrumentos de medición de longitud nos ayudan a estandarizar de manera universal la apreciación de longitud de los objetos.

d. Los ingenieros utilizan diariamente las matemáticas en su trabajo.

e. El trabajo en equipo es importante en la casa, en la escuela y en la vida profesional.

f. Muchos juegos para niños se relacionan con la geometría.

Engánchate

La pluma espacial

Algo que frecuentemente olvidamos es que los bolígrafos requieren de la fuerza de gravedad para funcionar, así que los astronautas no los pueden usar, ¿te imaginas cómo escriben en el espacio?

El problema no es sencillo, ya que los lápices tampoco los pueden utilizar ya que al escribir generan polvillo de madera y grafito que pueden flotar e interferir con los circuitos de las naves, además la escritura se borra fácilmente, así que las anotaciones de los astronautas podrían perderse. Los plumones también requieren de la fuerza de gravedad para funcionar, así que también quedan descartados.

Durante un tiempo se usaron los marcadores tipo crayones, pero nuevamente, es fácil que difuminen polvillo y siempre está presente la restricción de que no deben liberar ningún tipo de polvo o restos que pueden flotar en el pequeño interior de las cápsulas espaciales.

La solución a estos problemas la dio en 1965 la empresa Fisher Space Pen Company, que creó y patentó un bolígrafo especial que funciona en gravedad cero. La idea fundamental es un cartucho de tinta a presión que mantiene a la tinta fluyendo aun en ausencia de gravedad.

En matemáticas, como en otras ciencias, muchos problemas tienen historias semejantes a los que generaron los bolígrafos y las plumas espaciales, los llamados "momentos ¡eureka!", como el de Ladislao Biro (o László Bíró), quien molesto de que su pluma fuente fallara buscó la manera de usar una tinta más espesa. La solución se le presentó cuando vio a unos niños jugar con las líneas que unas pelotas mojadas dejaban en el piso.

Como Arquímedes, en su tina, hay innumerables anécdotas de matemáticos que al pensar en cómo solucionar un problema dan con la clave en las situaciones y los lugares menos esperados.

¿Y tú, has encontrado soluciones en lugares y momentos inesperados?

▲ Ladislao Biro registró 32 inventos, entre los que se cuentan un lavarropas, una transmisión automática para automóviles, artefactos micromecánicos, un sistema de levitación magnética para trenes, el napalm, la resina fenólica, y un método para la separación de isótopos.

Lee más...

Acerca de Ladislao José Biro:
http://cyt-ar.com.ar/cyt-ar/index.php/Ladislao_José_Biro
Libros del Rincón: Noreña Villarías, Francisco, Juan Tonda Mazón, *La medición y sus unidades*, México, SEP, Editorial Santillana, 2002.

Patrones y ecuaciones

Lección **14** Resolverás problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas y aplicarás la fórmula general para resolver dichas ecuaciones

Explora

La fiesta

Roxana fue a una fiesta. A la hora de la cena los asistentes se dividieron y se sentaron en dos mesas. En una quedó la cuarta parte del total de los invitados al cuadrado y en la otra mesa se sentaron cuatro personas. ¿Cuántas personas asistieron a la fiesta?

1. Plantea y resuelve la ecuación cuadrática que describe el total de personas que estuvieron en la fiesta.

Descubre y construye

• La cerca

Para cercar un terreno rectangular de 750 m^2 se necesitan 110 metros de valla. ¿Cuánto mide el ancho y el largo del terreno?

1. Representa algebraicamente la fórmula que define el perímetro del terreno (usa las variables x y y).
2. Ahora, despeja la variable y de la ecuación del perímetro y escríbela.
3. Representa algebraicamente el área del terreno (usa las mismas variables x y y).
4. Toma el valor de y en términos de x que obtuviste de la fórmula del perímetro y sustitúyelo en la ecuación del área.
5. Lleva la ecuación anterior a la forma $ax^2 + bx + c = 0$:
   - ¿Cómo resuelves una ecuación como la anterior?
   - ¿Qué métodos conoces? Puedes repasar la lección 1 del bloque 1 y la 8 del bloque 2. Resuelve la ecuación y compara el resultado con tus compañeros.
   - Con los resultados de x y y que obtuviste, calcula el perímetro y el área del terreno y verifica su valor con el dado inicialmente.

Otra forma de resolver las ecuaciones cuadráticas es la siguiente:

1. Identifica los valores de a, b y c, de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.
2. Sustituye los valores anteriores en la siguiente expresión conocida como **fórmula general**:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(\ ) \pm \sqrt{(\ )^2 - 4(\ )(\ )}}{2(\ )}$$

Es importante conservar el signo de cada coeficiente al momento de sustituirlos en la fórmula. Si el coeficiente del término x, o el término independiente no aparecen, su valor es cero.

De la sustitución anterior se derivan dos soluciones, en una se suma la raíz y en la otra se resta:

$$x_1 = \frac{-(\ ) + \sqrt{(\ )^2 - 4(\ )(\ )}}{2(\ )} \qquad x_2 = \frac{-(\ ) - \sqrt{(\ )^2 - 4(\ )(\ )}}{2(\ )}$$

3. Obtén sus valores.
4. Para encontrar los valores de y se sustituyen x_1 y x_2 en la ecuación del perímetro despejada:

Cuando x_1 = ________ Cuando x_2 = ________
y_1 = ________ y_2 = ________

En este caso ambos pares son la solución de la ecuación cuadrática con la diferencia de que en un par de las dos soluciones la variable x representa el ancho, y en el otro el largo, y lo mismo sucede para la variable y.

En ocasiones hay soluciones que no tienen sentido con el tipo de magnitud involucrada en el problema. Por ejemplo, si una de las dos soluciones anteriores hubiera sido negativa, ésta sería ignorada, puesto que nuestras variables representan longitudes. Solo se tomaría la solución en la que las variables sean positivas.

5. Sustituye el valor de x_1 y y_1 en el planteamiento del problema para verificar si el perímetro es 11 cm y el área 750 m^2. Repite el procedimiento con x_2 y y_2.

• Aplica la fórmula

Martín saca un vaso de agua del refrigerador y lo acerca a una fuente de calor. Durante los primeros 10 segundos la temperatura del agua comienza a aumentar de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$T = -0.1t^2 + 2.8t + 2$$

donde T es temperatura y t es el tiempo transcurrido.

Para tu apunte

Al radicando $b^2 - 4ac$ se le conoce como **discriminante** y es considerado para encontrar la cantidad de soluciones posibles en una ecuación cuadrática o si no tiene solución. Al resolver una ecuación por medio de la fórmula general ten en cuenta que si el discriminante es positivo, entonces la raíz cuadrada existe y hay dos soluciones, una, sumando la raíz y otra, restándola. En el caso de que el discriminante sea cero la raíz cuadrada también lo sería, y entonces hay una sola solución. Por último, si el discriminante es negativo, la raíz no existe y por tanto, no hay solución.

1. Responde:
   - ¿Cuál es la temperatura del agua al salir del refrigerador?
2. Completa los valores de tiempo t en los que se tiene las temperaturas T indicadas:

Tiempo t (s)	Temperatura T (°C)
	5
	10
	12
	16
	20

• Volumen específico

¿Cuál es el radio de un cono de 10 cm de altura y volumen de 160 cm^3?

1. Plantea la ecuación cuadrática que representa el volumen del cono con los datos determinados y resuélvela.
2. Ahora utiliza la fórmula general y compara la solución.
3. Comenta con tus compañeros y maestro, ¿qué ventaja tiene usar la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas?

Pongámonos de acuerdo

El equipo de futbol rápido de la Escuela Secundaria Diego Rivera, rentará una cancha profesional para entrenar antes de la final de un torneo. El alquiler de la cancha es de 246 pesos que pagarán entre todos los jugadores. Si tres jugadores más hubieran cooperado para la renta, el pago individual sería $4.10 menos de lo establecido.

- ¿Cuántos estudiantes cooperaron para pagar la renta?
- ¿Con cuánto cooperaron?

1. Comenta con tus compañeros cómo podrían representar algebraicamente este problema.
2. Consideren x como la variable que representa el número de jugadores que pagaron la renta de la cancha. Algebraicamente ¿cuánto pagaron de manera individual?
3. Algebraicamente ¿cuánto habrían pagado si tres jugadores más hubieran cooperado?

Hay dos formas de representar este último inciso, una es, como en el primer caso, dividir el total de la renta entre el número de jugadores agregando tres más; y la otra es en función de lo que ahorrarían partiendo del pago de los primeros. Al igualar estas dos formas algebraicas obtienes la ecuación asociada al problema.

Para tu apunte

Toda ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, puede ser resuelta, o concluir que no existe solución, con la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En donde si:
- $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación cuadrática tiene dos soluciones.
- $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación cuadrática tiene una solución.
- $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación cuadrática no tiene solución en los números reales.

De vuelta al Explora

Revisa nuevamente cómo intentaste plantear y resolver la ecuación que modela el total de personas de la fiesta a la que fue Roxana.

- ¿Qué tipo de ecuación es?
- ¿Qué métodos conoces para resolverla?
  - ⇒ Coméntalos con tus compañeros.
  - ⇒ Resuelve la ecuación con diferentes métodos y comparen cuál es el más eficiente para este caso.

Muchos problemas del mundo real pueden ser resueltos con ecuaciones cuadráticas.

Practica

1. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando la fórmula general:
   - a. $1.5x^2 + 4.6x - 2.7 = 0$
   - b. $121x^2 - 132x + 36 = 0$
   - c. $10.2x^2 - 2.9x + 8.3 = 0$
   - d. $x^2 - 6x + 5 = 0$
   - e. $x^2 - 5x + 6 = 0$
   - f. $x^2 + 2x + 2 = 0$
   - g. $x^2 + x = 0$
   - h. $4x^2 + 12x - 9 = -9$
2. ¿Qué edad tiene Tania si hace 14 años tenía la raíz cuadrada de la edad que tendrá en 16 años?
3. Un abuelo tiene 62 años y su nieto 2 años.
   - ¿Cuántos años pasarán para que el doble de la edad del abuelo sea igual a la edad de su nieto al cuadrado?
   - ¿Qué edad tendrán cada uno al pasar ese tiempo?

Cuando resuelves ecuaciones cuadráticas aplicando la fórmula general es común que utilices la calculadora científica. Sin embargo, en ocasiones el uso de la calculadora no se aprovecha al máximo.

4. Intenta resolver la ecuación cuadrática $x^2 + 2x - 35 = 0$ con la fórmula general. Primero identifica las variables $a = 1$, $b = 2$ y $c = -35$ y sustitúyelas en la fórmula:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-35)}}{2(1)}$$

Utiliza la calculadora científica para resolverla, pero sólo escríbela en un renglón, es decir, sólo puedes presionar "=" una vez.

⇒ Intenta escribirla primero en papel, recuerda el uso de los paréntesis y la jerarquía de operaciones.

⇒ Puedes probar tu operación en la página http://web2.0calc.es/ y verificar si tiene la estructura de la fórmula general. Una vez encontrada la correcta, escríbela en tu calculadora.

Evalúa tu avance

1. ¿Cuántas soluciones tendrá una ecuación cuadrática si el cuadrado de b es menor a 4 veces la multiplicación de a y c?
   a. Dos soluciones
   b. Una solución
   c. Ninguna solución
   d. Siempre es cero la solución

2. Al resolver la ecuación $x^2 - 4x - 96 = 0$ aplicando la fórmula general, el valor del discriminante es:
   a. 400
   b. 256
   c. 225
   d. 576

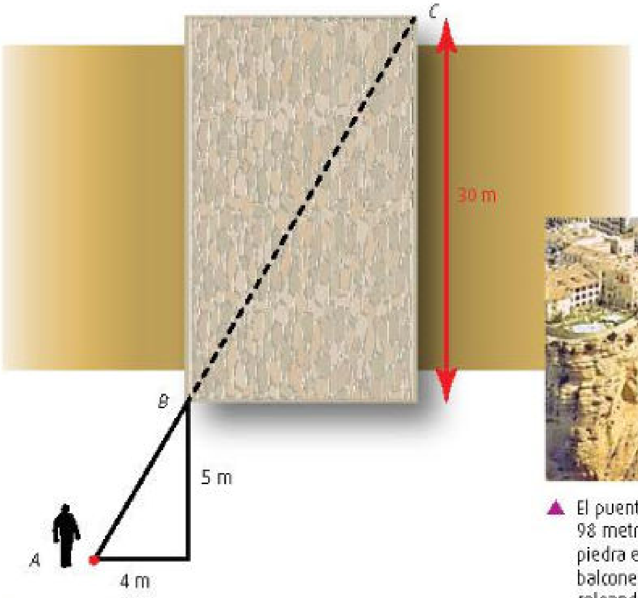
Figuras y cuerpos

Lección 15 Aplicarás los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas

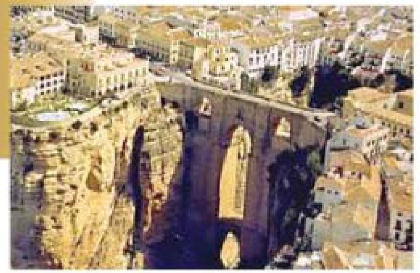
Explora

El ancho del puente

En la guerra civil española, el soldado estadounidense Robert Jordan intentó volar un puente en Ronda, Granada. Para ello calculó el ancho del puente de la manera siguiente: parado en el punto A vio una esquina del puente (punto B); caminó hacia la derecha en línea recta 4 metros y 5 metros hacia arriba como se ve en la figura. Se dio cuenta de que la otra esquina del puente (punto C) mantenía la misma dirección que había del punto A al B. Sin moverse del punto B, calculó el ancho del puente pues sabía que el largo del mismo era de 30 metros.



▲ Esquema del puente.



▲ El puente de Ronda es una obra maestra de 98 metros de altura, construida con sillares de piedra extraídos del fondo del río. Desde sus balcones las vistas del fondo y de las casas colgando sobre el borde del precipicio son impresionantes.

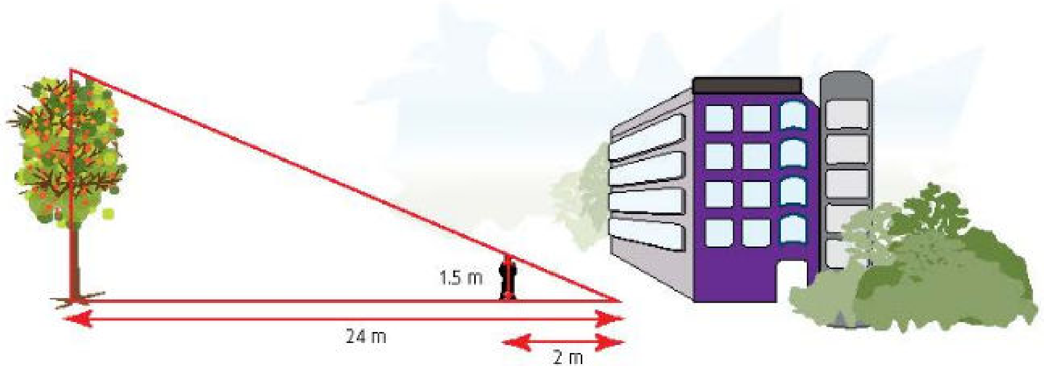
• ¿Cuánto medía el ancho del puente?

Descubre y construye

• La medida del árbol

Cerca de la casa de Rocío hay un árbol que está en riesgo de caer a causa de las lluvias. Sus papás quieren averiguar cuál es la altura del árbol para saber si podría llegar a caer sobre su casa.

1. Calcula la altura del árbol con los siguientes datos:



▲ Esquema del árbol y la casa

2. Describe brevemente en tu cuaderno al menos tres métodos para saber la altura del árbol. Evalúa cuáles son viables y cuáles no.
3. Localiza en el diagrama de arriba dos triángulos, ¿son semejantes? ¿Qué criterio utilizaste para decidir que son semejantes?
   - ¿Cuál es la altura del árbol?
   - ¿Cuál es el resultado de dividir la distancia entre la casa y el árbol y la distancia entre la casa y Rocío?
   - ¿Cuál es el resultado de dividir la altura del árbol y la altura de Rocío?
   - De acuerdo con el criterio que utilizaste: ¿cómo son los lados de los dos triángulos?

El procedimiento para resolver este tipo de problemas es muy sencillo si sabes plantearlos correctamente:

⇒ Haz un esquema del problema.
⇒ Localiza dos triángulos en tu esquema (de uno de ellos debe ser posible conocer dos de sus lados).
⇒ Establece los lados correspondientes de los dos triángulos.
⇒ Plantea una proporción con los lados correspondientes en donde conozcas tres datos.
⇒ Resuelve la proporción con la regla de proporciones.

Para tu apunte

La **semejanza** funciona muy bien para calcular alturas inalcanzables si sabes reconocer los triángulos semejantes.

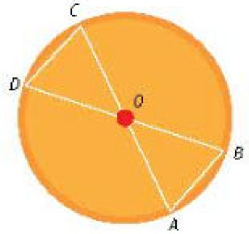
Otra manera de resolver este problema es plantear una ecuación y despejar h:

$$\frac{h}{1.5} = \frac{24}{2}.$$

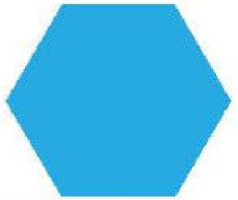
A esta igualdad de dos razones se le conoce como **proporción**.

• ¿Iguales?

1. Si el punto O es el centro del círculo, argumenta por qué los triángulos ABO y CDO son congruentes:



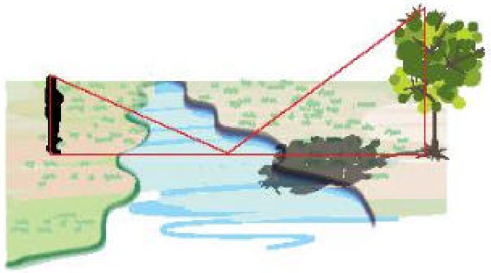
2. Responde: ¿cómo puedes verificar sin medir que los ejes de simetría de un hexágono regular forman doce triángulos congruentes?



▲ Hexágono regular.

• La altura del árbol

Una persona observa en un charco el reflejo de un árbol. La distancia que hay de la base del árbol al charco es de 17 m y la distancia a la que sus pies se encuentran del charco es de 3 m. La altura de la persona es de 1.7 m y los ángulos que se forman entre el suelo y lo más alto del árbol y la persona, respectivamente, miden lo mismo.



▲ Esquema.

1. Calcula la altura del árbol.
2. ¿Se te ocurre otra manera de calcular la altura del árbol usando semejanza de triángulos? Por lo menos existe una forma más, búscala y asesórate con tu maestro.
3. ¿Cuál es el criterio de semejanza que hace que los triángulos formados sean semejantes? Justifica tu respuesta.

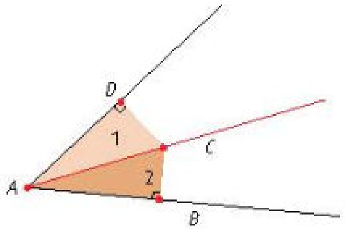
Para tu apunte

Si dos triángulos son semejantes, la razón entre ellos es la división entre la distancia de sus lados correspondientes. Esta razón cambia dependiendo del orden en que se dividen los lados de los triángulos, de mayor a menor o viceversa.

Pongámonos de acuerdo

Reunidos en parejas demuestren que al tomar cualquier punto de la bisectriz de cualquier ángulo y trazar la distancia más corta hacia las dos semirrectas se forman dos triángulos congruentes. Lo más importante es que aprendan a escribir de manera adecuada esta demostración para que cualquier persona que la lea pueda entender con toda precisión qué estás comparando, midiendo, etcétera.

1. Analicen el siguiente dibujo donde los rayos *AD* y *AB* forman el ángulo *DAB*, y la línea *AC* es la bisectriz del ángulo *DAB*.



2. Respondan:
   - ¿Cómo podrían demostrar que los triángulos 1 y 2 *ABC* y *ADC* son congruentes? ¿Qué elementos deberían comparar de cada uno de los triángulos para verificar que son congruentes?
   - ¿Qué lado comparten los dos triángulos que queremos demostrar que son congruentes?
   - ¿Qué ángulos comparten los dos triángulos? Analicen que la línea *AC* es bisectriz del ángulo *DAB*, por tanto, ¿cómo son los ángulos *DAC* y *CAB*?
   - ¿El segmento *DC*, que es perpendicular a *DA*, mide lo mismo que el segmento *CB*, que es perpendicular a *AB*?
   - ¿Se puede afirmar que si los triángulos son congruentes entonces todas las medidas de éstos son iguales?

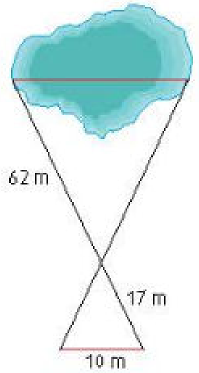
Recuerden bien esta conclusión porque la necesitarán para resolver los problemas de la sección PRACTICA.

De vuelta al Explora

1. Analiza de nuevo el dibujo, deduce cómo hizo el cálculo Robert Jordan, haz tus propios cálculos y responde:
   - ¿Cuánto mide el ancho del puente?
2. En parejas, discutan qué pasos deberían seguir para explicar a alguien que no conoce de semejanza cómo hizo Robert Jordan su cálculo.
3. Con la explicación que acaban de construir, ahora platiquen cómo calcularían la altura inaccesible de un edificio (o cualquier construcción alta).

Practica

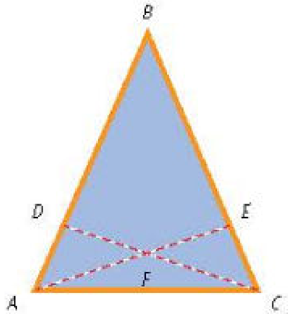
1. ¿Cuánto mide el ancho del lago como el que aparece en la siguiente figura si sólo se conocen los siguientes datos y se sabe que los lados rojos son paralelos:



▲ Dibujo esquemático del lago.

2. En la siguiente figura encuentra todos los triángulos semejantes y congruentes que hay. Cada lado del triángulo equilátero grande está dividido en tres partes iguales. En la sección PONGÁMONOS DE ACUERDO de esta lección, se usó el lenguaje formal para demostraciones. Utiliza dichas conclusiones para probar tus afirmaciones.

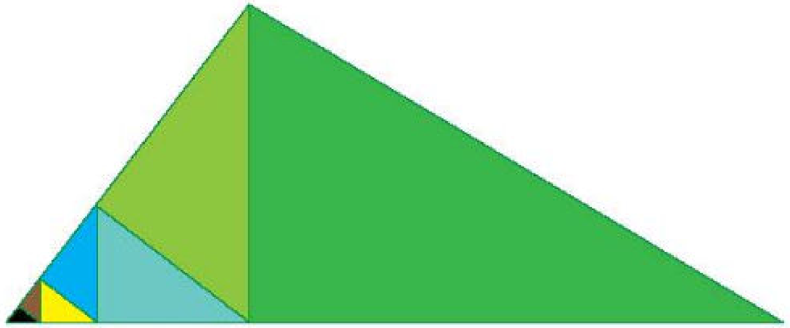
3. Un triángulo *ABC* isósceles cuyos lados $AB = AC$ es trisecado en el ángulo *BAC*. Demuestra que los dos triángulos exteriores son congruentes.
4. Al triángulo isósceles *ABC* se le trazan las dos alturas desde los lados iguales y se marcan los pies de las alturas como *D* y *E*. Demuestra que los triángulos *DAF* y *EFC* son congruentes.



Para tu apunte

¿Conoces el significado de la palabra **trisecado**? Concluye qué significa. Si sabemos que bisecar es partir un ángulo en dos partes idénticas, trisecar será...

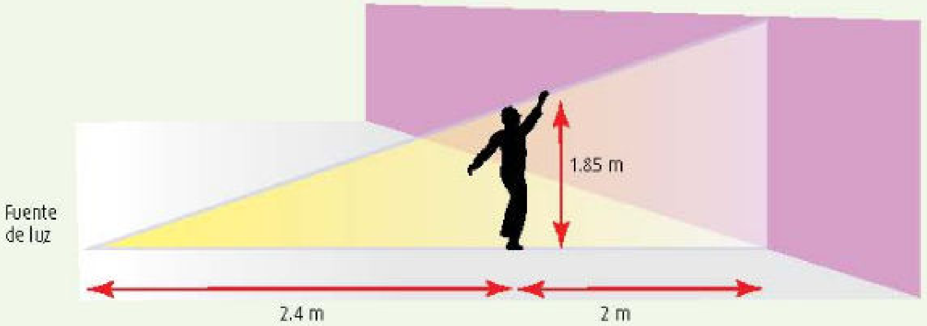
5. Traza un triángulo cualquiera y marca una de sus alturas. Verás que se forman otros dos triángulos. Ahora traza la altura de uno de ellos (verifica que comparta el mismo ángulo); se forman nuevamente dos triángulos. Traza una vez más la altura del triángulo que comparte el ángulo con el triángulo original. Demuestra que son semejantes.



Evalúa tu avance

1. En un escenario un actor que mide 1.85 m está de pie a 2.4 m de un reflector que está en el piso. La pantalla está a 2 m por detrás del actor. ¿De qué tamaño es la sombra que proyecta el actor?

a. 1.54 m
b. 3.4 m
c. 3.8 m
d. 2.4 m



2. Los lados de un triángulo miden 3 cm, 4 cm y 5 cm. Si construyes un triángulo semejante a éste cuyo lado menor mide 15 cm, de modo que la razón de semejanza entre los dos triángulos es 5, ¿cuánto miden los otros dos lados del segundo triángulo?

a. 20 cm y 25 cm
b. 15 cm y 20 cm
c. $\frac{4}{5}$ cm y 1 cm
d. 8 cm y 10 cm

Figuras y cuerpos

Lección 16 Resolverás problemas geométricos mediante el teorema de Tales

Explora

Un razonamiento lógico

¿Cómo sabrías la altura de tu salón de clase sin tener una escalera y medirla? Tales de Mileto calculó la altura de la pirámide de Keops sólo observando la sombra de la pirámide y la de un árbol cercano. Haz un boceto y elabora una hipótesis acerca de cómo sería posible realizar esta acción.

La pirámide de Keops es la más grande de las tres pirámides de la meseta de Giza, a las afueras de El Cairo (Egipto), es la única de las Siete Maravillas del mundo antiguo que aún sigue en pie.

Descubre y construye

- El teorema de Tales

1. Sigue las instrucciones:
   ⇒ Traza un triángulo cualquiera ABC.
   ⇒ Traza una línea paralela a cualquiera de sus lados sobre el triángulo.
2. Encuentra un triángulo semejante al ABC y calcula la razón entre ellos.
3. Tú y todos tus compañeros escriban la relación que acaban de construir como una proporción. Muéstrenla a su maestro y entre todo el grupo decidan cuál es la más atinada.

Para tu apunte

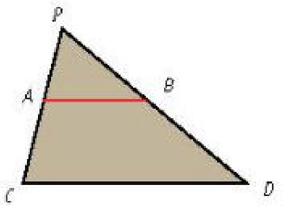
Cuando en cualquier triángulo se traza un segmento paralelo a alguno de sus lados (que corte al triángulo) quedarán dos triángulos semejantes. Por tanto, sus lados correspondientes son proporcionales.

Para tu apunte

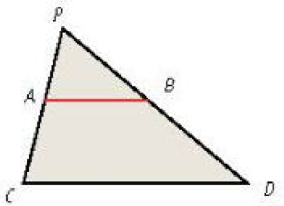
Una **razón** es la relación entre dos datos a través de una división. Puede expresarse como fracción, como decimal o como porcentaje. La ventaja de expresarla como fracción es que se le puede simplificar o encontrar fracciones equivalentes; si es un decimal se puede trabajar como el factor de escala y si es un porcentaje, ¿cuál crees que sea la ventaja? Platíquenlo en grupos y con su maestro.

• La distancia desconocida

1. Encuentra las distancias que se piden en cada una de las siguientes figuras. Sabemos que las líneas rojas son paralelas a las bases de los triángulos correspondientes:



▲ Figura 1.



▲ Figura 2.

- Figura 1. Si $CD = 7$, $PA = 2$ y $AC = 5$, ¿cuánto mide AB?
- Figura 2. Si $PC = 9$, $CD = 6$, $AB = 5$ y $BD = 1$, ¿cuánto miden PA, PB y PD?

2. Sigue estos pasos para hallar las distancias:
   ⇒ Encuentra lados correspondientes conocidos.
   ⇒ Plantea una razón entre ellos.
   ⇒ Busca qué lado es correspondiente al dato que te preguntan en el problema.
   ⇒ Establece ahora con ellos otra razón.
   ⇒ Forma la proporción y resuélvela con regla de tres.

• La pendiente

En algunos lugares del mundo existen señales de tránsito que identifican la pendiente de la carretera como se ilustra en las siguientes fotografías:

▲ Señales de tránsito.

El 10% significa que por cada 100 m que subas avanzarás horizontalmente 1 000 m.

▲ Esquema de una pendiente del 10%.

1. Una vez analizado lo anterior responde:
   - En una colina empinada con 30% de pendiente ¿cuántos km horizontales avanzará un auto si sube solamente 300 m?
   - En la misma colina con 30% de pendiente, ¿cuántos kilómetros verticales avanzará un auto si ya recorrió 120 kilómetros horizontales?
2. Escribe brevemente cómo se puede usar el teorema de Tales para el ejercicio anterior.

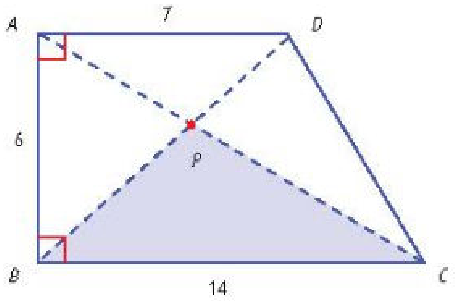
¡Es la misma pendiente que usaste en las funciones lineales! Cuando aprendiste funciones lineales representabas la pendiente con la literal m, y significa

$$\frac{\text{lo que subes}}{\text{lo que avanzas}}$$

cuando graficabas. ¡También es la misma pendiente que disfrutas al bajar en bicicleta o patines y la que sufres cuando subes una montaña o una rampa!

• El área complicada

1. Analiza el siguiente trapecio rectangular y responde:



- ¿Cuánto mide el área del triángulo BCP? Sabemos que el punto P es la intersección de las diagonales del trapecio.
- ¿Podrías encontrar dos triángulos semejantes?
  ⇒ A partir de ellos, halla dos paralelas con las cuales puedas plantear la primera razón.
  ⇒ Ahora busca cómo encontrar la altura de los triángulos semejantes y aplica el teorema de Tales.

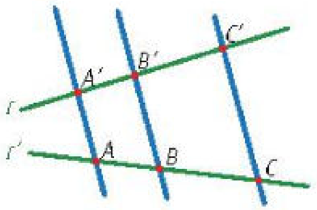
Pongámonos de acuerdo

¿Cómo harías para dividir un segmento cualquiera en *n* partes iguales solamente usando una regla sin graduar y un compás?

1. Inventa un método con algunos pasos a seguir para hacerlo. Una pista: necesitarás una línea recta auxiliar al segmento que quieres dividir en partes iguales.
2. Después de escribir los pasos de tu método, pide a un compañero que lo aplique para cualquier recta y lo valide con una regla graduada. Asimismo, usa el método de tu compañero y verifica si es claro, válido y preciso.
3. En seguida reúnanse con otra pareja y elijan el mejor método del equipo. Expónganlo frente a otro cuarteto y argumenten cuál método es mejor, o por qué no es válido alguno de ellos. Pueden usar contraejemplos o demostrar su validez y precisión midiendo las divisiones del segmento.
4. Entre todo el grupo discutan cuál y por qué fue la mejor manera de dividir un segmento en partes iguales.

Para tu apunte

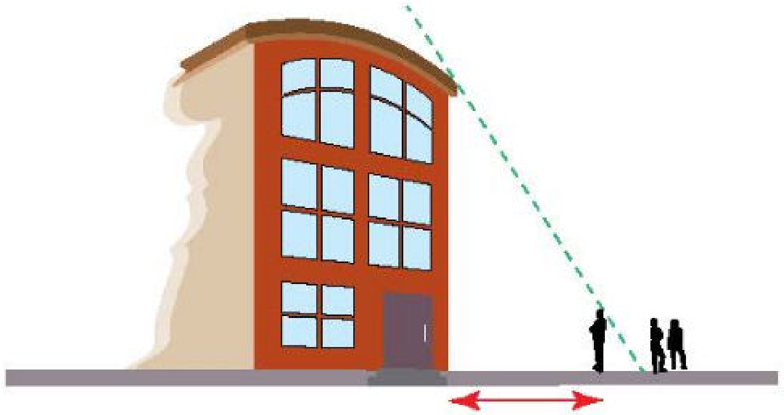
El famoso **teorema de Tales** es: si dos segmentos o rectas cualesquiera son cortadas por varias rectas paralelas, los segmentos que determinan los cortes de las rectas paralelas son proporcionales a los segmentos correspondientes del otro segmento o recta.



$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}$$

De vuelta al Explora

Para poder saber la altura de tu salón de clase sólo necesitas conocer algunas medidas. Por ejemplo, si sabes cuánto mides y la distancia que hay desde donde estás hasta la pared del salón puedes conocer la altura del salón de clase. Ayúdate con el siguiente boceto:

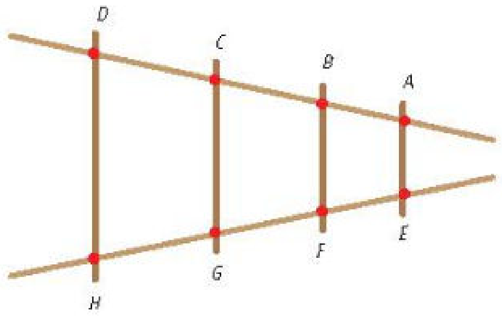


En este caso la inclinación de la sombra de la escuela es la misma que la tuya (o de cualquier objeto puesto que el Sol tiene el mismo ángulo de elevación en ese momento para cualquier objeto en la misma latitud). Con ello puedes aplicar el teorema de Tales y resolver el problema.

1. Una vez que conoces lo anterior responde:
   - ¿Cómo medirías la altura del techo estando dentro del salón de clase (o sin la luz del Sol). Descríbelo y compruébalo.
2. Si aún no has descifrado cómo Tales calculó la altura de la pirámide de Keops, investígalo y trae la información al salón.

Practica

1. Analiza el siguiente dibujo y calcula todas las distancias que se piden.



Sabemos que todas las rectas verticales son paralelas y las medidas conocidas son:

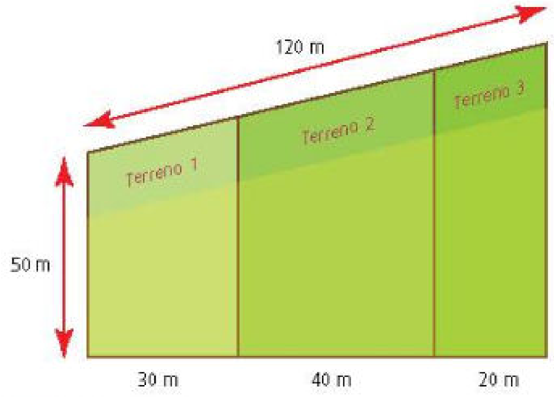
a. $\overline{AB} = 15$, $\overline{BC} = 30$ y $\overline{FG} = 21$. Encuentra $\overline{EF} =$

b. $\overline{GH} = 200$, $\overline{CD} = 150$ y $\overline{FG} = 125$. Encuentra $\overline{BC} =$

c. $\overline{EF} = 20$, $\overline{DC} = 50$ y $\overline{AB} = 40$. Encuentra $\overline{GH} =$

d. $\overline{AB} = 5$, $\overline{CD} = 15$ y $\overline{GH} = 36$. Encuentra $\overline{EF} =$

2. En un barrio se venden terrenos a \$150 el metro cuadrado. ¿Cuánto cuestan los terrenos que se muestran en el siguiente esquema?



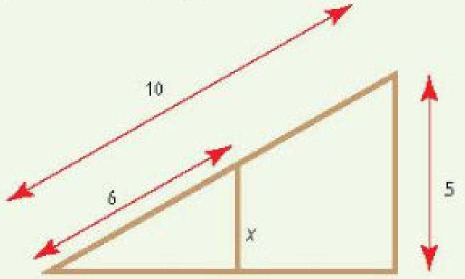
Croquis de los terrenos.

3. Sea ABC un triángulo cualquiera y DEF sus puntos medios correspondientes.
   - ⇒ Elabora los argumentos para demostrar que ABC es semejante a DEF usando el teorema de Tales.
   - ⇒ Para ayudarte a plantear el problema y solucionarlo, traza los triángulos.
4. Un edificio de 70 m proyecta una sombra de 105 m de longitud. Con ese mismo ángulo de sombra, ¿cuánto mide la sombra que proyecta una persona que mide 1.63 m?
5. Sea $ABCD$ un paralelogramo en el que F y G son los puntos medios de AB y CD, respectivamente.
   - ⇒ Explica cómo demostrarías que los segmentos FC y AG dividen la diagonal BD en tres segmentos iguales.

6. En la siguiente dirección electrónica encontrarás una breve explicación del teorema de Tales así como su aplicación en la división de segmentos. http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Semejanza_aplicaciones/teorema_de_thales.htm
   - ⇒ Después de terminar la actividad 7 de la página web, responde:
     - ¿Por qué al mover los puntos A, B, C y C' las divisiones a la izquierda se mantienen constantes?
     - ¿Qué sucede con las distancias entre los puntos A', B' y C' cuando cambias de posición el punto C'?
     - ¿Qué sucede con las distancias entre los puntos A, B y C cuando cambias de posición el punto C'?

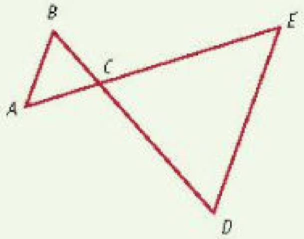
Evalúa tu avance

1. ¿Cuánto mide el segmento x?



a. 8.333
b. 12
c. 3
d. 2.5

2. Si sabemos que AB es paralela a DE, ¿qué relación se cumple en el siguiente esquema?



a. $\frac{\overline{AC}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CD}}$

b. $\frac{\overline{AB}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CD}}$

c. $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}}$

d. $\frac{\overline{DC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DC}}$

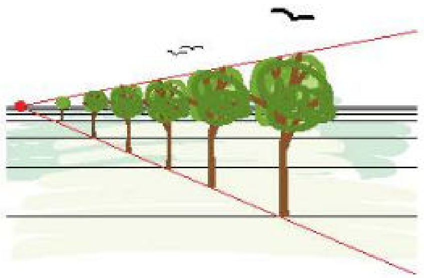
Figuras y cuerpos

Lección 17 Aplicarás los resultados de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas

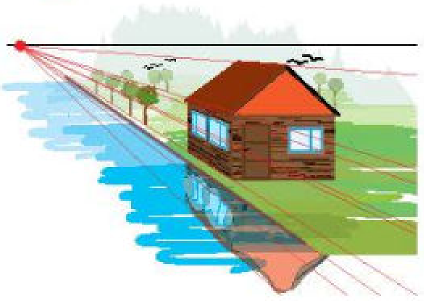
Explora

La representación real de objetos

Cuando se quiere dibujar algo en perspectiva (diseño proyectivo) es necesario ubicar el **punto de fuga**, el cual es un punto imaginario en un dibujo que hace que éste se vea realista.



▲ Figura 1.



◄ Figura 2.

1. Responde con tus propias palabras:
   - ¿Qué es el punto de fuga?
   - En la figura 1, ¿todos los árboles son de igual forma? ¿Tienen diferente tamaño?
   - ¿Cuál es la relación entre la longitud de las líneas que van al punto de fuga y el tamaño de las figuras?

Descubre y construye

• Los dos cuadrados

1. Dibuja dos cuadrados $ABCD$ y $A'B'C'D'$ de diferente tamaño al centro de una hoja de tu cuaderno.
2. Encuentra el punto de fuga entre estos dos cuadrados y nómbralo O.
   ⇒ Una pista: une A con A', B con B', C con C' y D con D'.
   ⇒ Prolonga las rectas hasta que se junten todas en un solo punto.
3. Mide las distancias que se enuncian y calcula las siguientes razones:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \_\_\_\_$$

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} = \_\_\_\_$$

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OC'}} = \_\_\_\_$$

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{OD'}} = \_\_\_\_$$

4. Responde:
   - ¿Qué unidad tendría cada una de las razones?
   - ¿Por qué no tiene unidades?
   - Si no tiene unidades, ¿a qué se refiere?
   - ¿En qué otro tema de matemáticas has aplicado este concepto?
5. Compara tus resultados con los de tus compañeros. Si en alguna de las razones tuvieron un resultado diferente, revisen su división y repítanla cuidando los detalles.

Para tu apunte

Una **homotecia** con centro en O y razón K es la transformación que hace corresponder cada punto P con un punto P', que alineado con O y P, da por resultado que $OP' = K(OP)$.

¡Nuevamente estarás trabajando con una razón! ¿Recuerdas en qué otras lecciones lo has hecho y cómo la aplicaste? ¿Recuerdas en cuál lección se le llama pendiente? ¿Cuándo le llamamos factor de escala o constante proporcional?

• La amplificación

1. Agranda por medio de una homotecia el siguiente cuadrado de tal manera que el área del nuevo cuadrado sea el doble del área del original.

2. Una vez que agrandes el cuadrado responde:
   - ¿Cuánto mide el área del cuadrado original?

   - ¿Cuál es la distancia entre el centro de homotecia y los vértices correspondientes del cuadrado pequeño y el grande?
   - ¿A qué distancia del cuadrado original colocaste el centro de homotecia?
   - ¿Tiene que ser una razón positiva o negativa?
   - ¿Cuál es la razón de homotecia que hace aumentar al doble el área del cuadrado?
3. Ahora, por medio de una homotecia gira 180° el siguiente dibujo y responde:

   - ¿En dónde colocaste el centro de homotecia?
   - ¿Tiene que ser una razón positiva o negativa?
   - ¿Cuál es la razón de homotecia que hace girar 180° la figura?

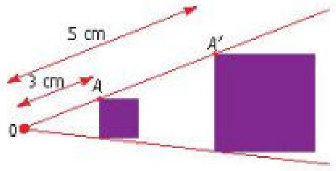
Para tu apunte

Otra forma de saber cuál es la razón de homotecia es dividiendo las distancias

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = k$$

en el que O es el centro de homotecia y A' el punto homotético de A.

Por ejemplo, en el siguiente esquema: $k = 0.6$.



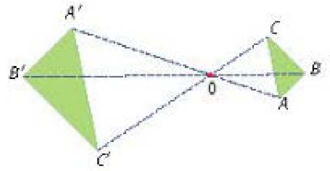
$$k = \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{3}{5} = 0.6$$

• Un diseño complicado

1. Obtén un cuadrado semejante a partir de un cuadrado de 50 milímetros de lado con razón de homotecia $k = \frac{-3}{2}$. Utiliza regla, lápiz y papel.
2. Después de hacer el trazo responde:
   - ¿Qué le ocurre a la figura cuando se le aplica una homotecia k con $k > 1$?
   - ¿Qué le pasa a la figura cuando se le aplica una homotecia k con $0 < k < 1$ (o sea, que la figura homotética está entre la original y el centro O)?
   - ¿Qué le ocurre a la figura cuando se le aplica una homotecia k con $-1 < k < 0$ (significa que la figura homotética queda después del punto de homotecia O)?
   - ¿Qué le pasa a la figura cuando se le aplica una homotecia k con $k < -1$?

PARA TU APUNTE

Una **homotecia negativa** o inversa es aquélla en donde la razón homotética es menor a cero ($k < 0$). La figura homotética estará del lado contrario de donde se encuentra la figura principal con respecto al punto fijo. Para trazar la figura homotética se unen con rectas cada vértice de la figura principal con el punto fijo y se extienden las rectas. Luego se mide a partir del punto fijo hacia el sentido contrario la magnitud de los nuevos vértices, la cual dependerá del valor de k.

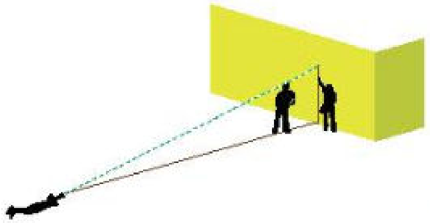


En esta imagen, el punto homotético de A es A' y está a razón −2 porque la distancia OA' mide el doble que la distancia OA.

Pongámonos de acuerdo

Reunidos en equipos de tres personas realicen el siguiente experimento, sólo necesitarán un apuntador láser o una lámpara potente.

1. Uno de ustedes (alumno A) se parará a un metro de distancia de la pared y otro (alumno B) se acostará en el suelo y desde allí apuntará por encima de la cabeza del alumno A lo más alejado de la pared que se pueda. El alumno C medirá la altura a la que llegó el láser en la pared.



Esquema del experimento.

2. Después de hacer este ejercicio respondan las siguientes preguntas:
   - Si el alumno A se acerca a la pared, ¿será menor o mayor la altura donde apunta el láser?
   - Si se aleja de la pared, ¿será menor o mayor la altura donde apunta el láser?
   - ¿A qué altura llegará el láser si se para a dos metros de distancia?
   - ¿A qué altura llegará el láser si se para a tres metros de la pared?
   - ¿Cuál es la razón de proporción entre la cercanía del alumno A con la pared y la altura a la que llega el láser?
   - ¿Cuáles relaciones homotéticas encuentran en este experimento?

Para tu apunte

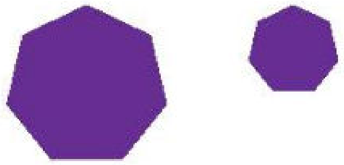
En la **semejanza de triángulos** también hay una constante de proporción pero en la razón de homotecia el centro de homotecia es cualquier punto.

De vuelta al Explora

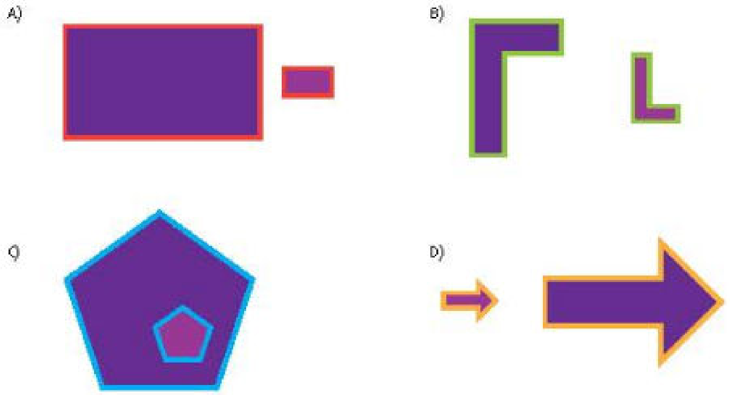
1. Analiza nuevamente los dibujos y responde:
   - ¿Qué relación tiene el diseño proyectivo con la homotecia?
   - Investiga cómo se le llama al punto de fuga en la homotecia.
2. Intenta hacer un dibujo de tu escuela en perspectiva.

Practica

1. Determina los vértices de la figura que resulta de transformar un cuadrado $ABCD$ mediante una homotecia con vértice en O, sabiendo que la figura homotética es otro cuadrado cuya área es tres veces menor que el cuadrado original.
2. Con base en el siguiente esquema, encuentra el centro de homotecia y la razón entre las dos figuras.



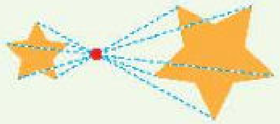
3. Dibuja una circunferencia y el centro de homotecia en algún punto dentro de ella. Encuentra la circunferencia homotética con razón de homotecia $k = 2.5$.
4. Encuentra los centros de homotecia de las siguientes figuras:

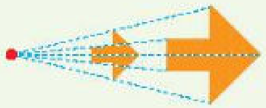


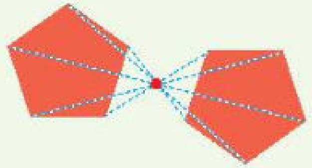
5. Dadas dos rectas cualesquiera l_1 y l_2 y un punto O determina los puntos B en l_1 y C en l_2 tal que el punto O pertenezca al segmento BC y que OB sea igual a OC.

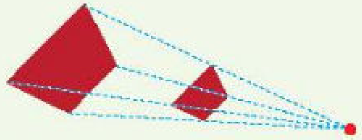
Evalúa tu avance

1. ¿Cuál de las siguientes figuras presenta una homotecia negativa de $\frac{-1}{2}$?

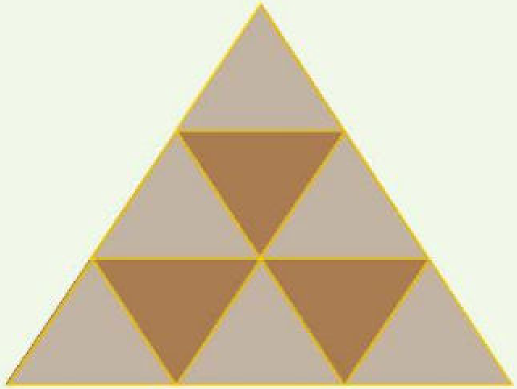
a. 

b. 

c. 

d. 

2. ¿Cuál es la razón de homotecia entre el triángulo más pequeño y el triángulo más grande? Se sabe que los triángulos están hechos por tercios del lado original.



a. $k = \frac{1}{4}$
b. $k = 4$
c. $k = 3$
d. $k = \frac{1}{3}$

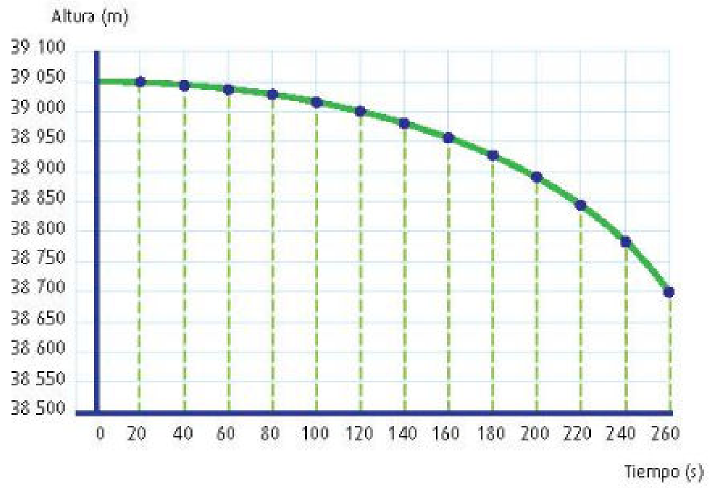
Proporcionalidad y funciones

Lección 18 **Leerás y construirás gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos**

Explora

Un salto de altura

El domingo 14 de octubre de 2012, Felix Baumgartner saltó de una cápsula desde la estratosfera en caída libre. Felix superó la velocidad del sonido en los primeros 40 segundos. En la siguiente gráfica se modela la altura en metros a la que recorrió Felix en el tiempo total de caída libre en segundos hasta antes de abrir su paracaídas.

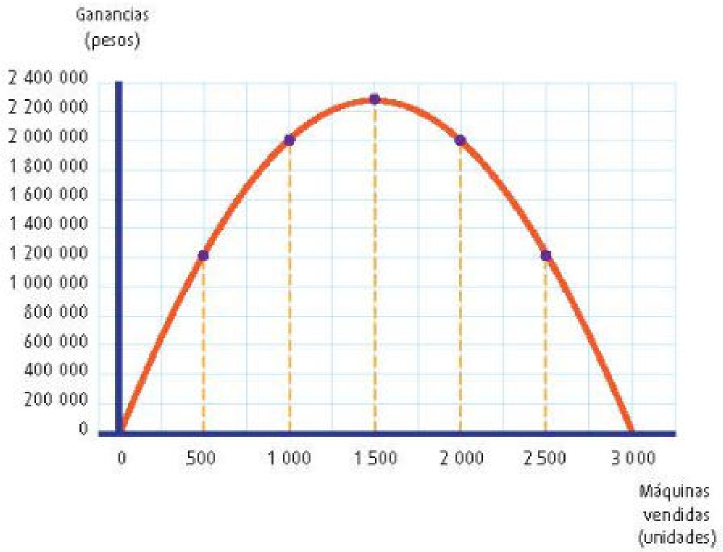


- ¿Qué información puedes obtener de esta gráfica? Comenta con tus compañeros y maestro.

Descubre y construye

• Las ganancias

La siguiente gráfica muestra las ganancias que obtiene una empresa por la venta de cierto equipo de máquinas industriales. Las ganancias son el beneficio económico y generalmente se calculan restando los costos de producción de los ingresos totales.



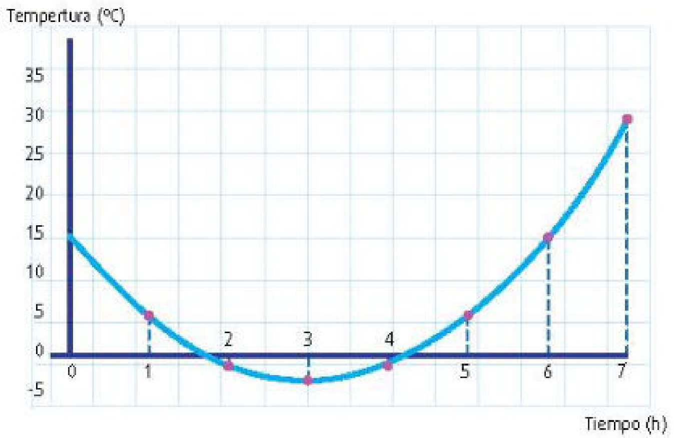
1. Analiza la gráfica y responde:
- ¿Cuántos equipos tendría que vender la empresa para obtener una ganancia de $1 200 000?
- ¿Cuál es la ganancia de la empresa si se venden 2 500 equipos?
- ¿Cuántos equipos es más conveniente vender para obtener una ganancia de $2 000 000? ¿Por qué?
- ¿Cuántos equipos tiene que vender la empresa para obtener la ganancia máxima?
- ¿Cuál es la máxima ganancia que puede tener la empresa?
- ¿Cuál es el límite de equipos que le recomendarías vender a la empresa? ¿Por qué?

Para tu apunte

Las representaciones gráficas tienen como objetivo facilitar la lectura e interpretación de cantidades amplias de información. Al leer una gráfica es muy importante identificar las magnitudes que se están graficando, así como la escala que se utiliza en cada una de éstas.

• Cambio de temperatura

La siguiente gráfica muestra la temperatura de un refresco en °C con respecto al tiempo en horas.



1. Analiza la gráfica y responde:
   - ¿En qué situación crees que se pudo haber presentado este cambio de temperatura del refresco?
   - ¿En qué momento(s) el refresco tiene una temperatura de 5 °C?
   - ¿En qué momento(s) el refresco alcanza la menor temperatura?
   - ¿Cuál es la temperatura mínima del refresco?
   - ¿Cuál es la temperatura del refresco al pasar siete horas? ¿Qué crees que ocurrió?

Para tu apunte

Las **funciones cuadráticas** se representan gráficamente por una curva llamada parábola cuya característica particular es que presenta un valor máximo o mínimo. Las parábolas también se caracterizan por ser simétricas verticalmente, por tanto, con excepción del mínimo o máximo, para cada valor de la función cuadrática ***y*** se tienen dos valores ***x*** que la satisfacen.

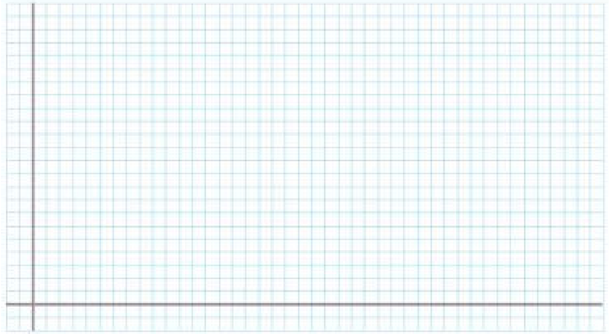
• Ayuda de emergencia

Un avión deja caer una bolsa con víveres desde una altura de 150 metros hacia una ciudad que padece de una inundación. Si no tomamos en cuenta la fricción del aire que podría frenar la caída, se sabe que la **distancia recorrida** durante la caída se ajusta a la siguiente representación algebraica:

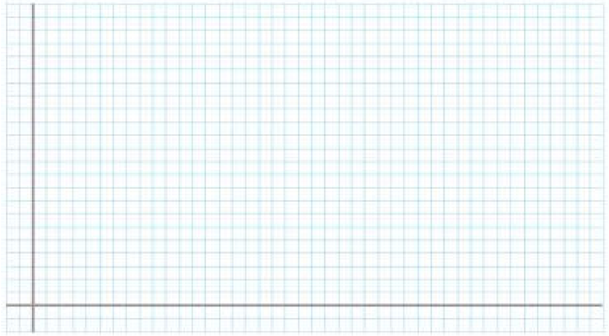
$$y = \frac{gt^2}{2}$$

Donde y es la distancia recorrida en metros, t es el tiempo transcurrido en segundos y g es la gravedad (aceleración que recibe un cuerpo al caer en la Tierra) y es equivalente a 9.8 m/s^2.

1. Haz una tabla de valores para y con los primeros 10 segundos de caída y traza en la cuadrícula siguiente la gráfica en la que se muestre la **distancia recorrida** (y) por la bolsa de víveres con respecto al tiempo.



2. Traza en la cuadrícula siguiente una gráfica en la que se muestre la **altura** (h) de la bolsa de víveres con respecto al tiempo (t). Observa en el planteamiento a qué altura volaba el avión (altura = altura inicial – distancia recorrida).

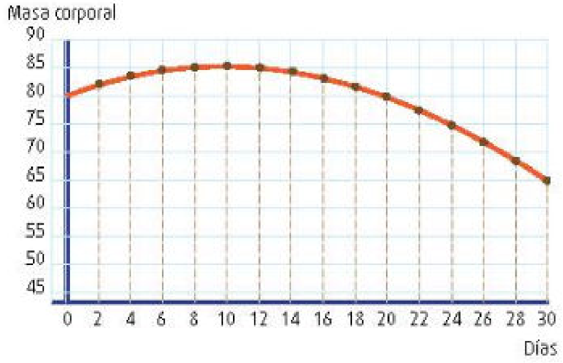


Para tu apunte

Una forma de verificar si estás graficando correctamente funciones cuadráticas es que todos los puntos que graficas deben caer sobre una parábola. Si un punto difiere mucho del trazo, verifica la operación para ese punto en la función.

Pongámonos de acuerdo

Por órdenes del médico la señora Gloria se sometió a una dieta estricta con el fin de bajar los niveles de triglicéridos (un tipo de grasa que se encuentra en la sangre y en el tejido adiposo). La siguiente gráfica nos muestra la masa corporal (comúnmente usamos la palabra **peso**) en kilogramos de la señora Gloria con respecto a los 30 días de dieta.



1. Reúnete con un compañero y comenten qué pueden concluir al analizar la gráfica.
   - ¿Qué ocurrió con el peso de la señora Gloria durante los primeros 10 días de la dieta?, ¿qué crees que pasó?
   - ¿Qué pasó después del décimo día?
   - ¿Cuál fue su peso al día 20?
   - Al terminar la dieta ¿qué peso tuvo la señora Gloria?
   - ¿Fue efectiva la dieta que realizó la señora Gloria?
   - ¿Qué otras conclusiones se pueden obtener a partir de esta gráfica?
     ⇒ Intenta obtener al menos otras dos además de las preguntas que aquí se te hacen.
   - ¿Qué factores crees que hayan influido para que el peso de la señora Gloria tuviera ese comportamiento?
     ⇒ Coméntalo con tus compañeros e intercambien opiniones. Revisen si sus conclusiones son válidas y lógicas. Platíquenlas con su maestro.

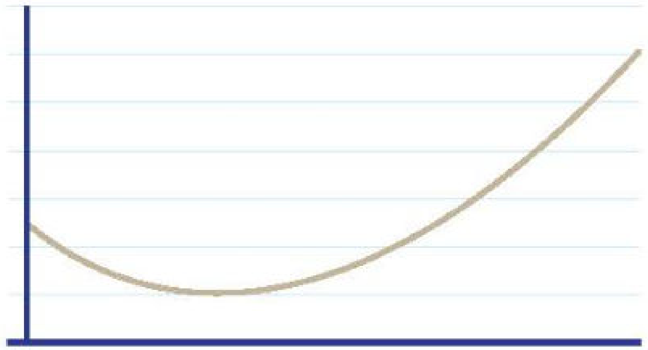
De vuelta al Explora

1. Regresa al primer problema y contesta las siguientes preguntas:
   - ¿Desde qué altura se lanzó Felix Baumgartner?
   - ¿Cuál fue el tiempo total de caída libre de Felix antes de abrir el paracaídas?
   - Aproximadamente, ¿a qué altura iba Felix cuando abrió el paracaídas?
   - ¿Cuánta distancia recorrió Felix en caída libre?
   - Aproximadamente, ¿a qué altura iba Felix cuando habían transcurrido 100 segundos?
   - Aproximadamente, ¿a qué altura iba Felix cuando habían transcurrido 200 segundos?
   - ¿Qué distancia recorrió Felix de los 100 a 200 segundos?
2. Investiga al menos dos situaciones en las que se pueda usar una función cuadrática para representar eventos reales.

Practica

1. Lee los siguientes incisos y determina con base en la información proporcionada cuál es la variable dependiente y cuál la independiente. Después haz la gráfica.
   a. Un móvil se traslada linealmente de un punto a otro y luego regresa otro tanto sin llegar al punto original.
   b. Su posición en metros con respecto al tiempo en segundos se describe por una función cuadrática.
   c. La distancia más lejana al punto original fue de 49 metros en 7 segundos.
   d. El móvil se detuvo a los 10 segundos.

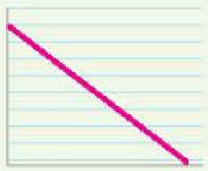
2. De las situaciones que investigaste en la sección de vuelta al EXPLORA, plantea algebraicamente una de ellas y haz su gráfica.
3. Describe una situación que pueda plantearse a partir de esta gráfica. Anota la escala de cada magnitud.



Evalúa tu avance

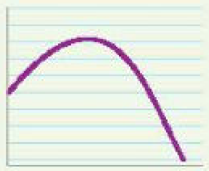
1. ¿Cuál de las siguientes gráficas describe la altura de una pelota que fue arrojada verticalmente hacia arriba desde una terraza que se encuentra a una altura de tres metros con respecto al tiempo en segundos?

a.



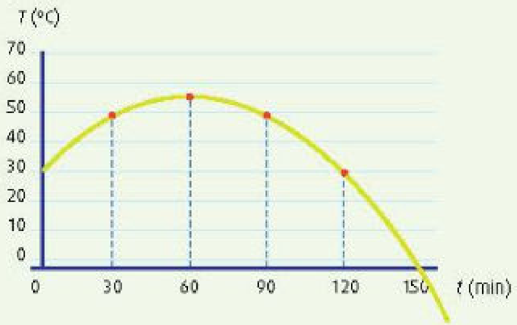
b.

c.



d.

2. ¿Cuál de las siguientes conclusiones es incorrecta según la información que se presenta en la gráfica?



a. La temperatura del agua disminuyó después de una hora.
b. La temperatura del agua alcanzó su punto de congelación cuando transcurrieron 2 horas y 30 minutos.
c. La temperatura disminuyó durante los primeros 60 minutos.
d. La temperatura máxima alcanzada por el agua fue de aproximadamente 55 °C.

Proporcionalidad y funciones

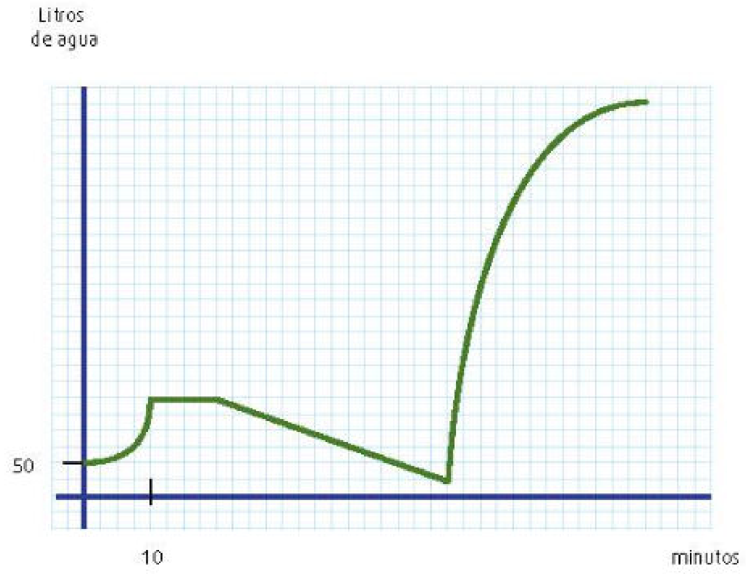
Lección 19

Leerás y construirás gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera

Explora

El tanque de agua

La siguiente gráfica muestra la variación de cantidad de agua en un tanque cilíndrico.



1. Responde:
   - ¿En qué situación puede tener el comportamiento que aparece en la gráfica la variación del volumen del agua en un tanque cilíndrico?
2. Comenta con tus compañeros y maestro.

Descubre y construye

- **Las copias**

En la papelería "El pingüino" las primeras 10 copias tienen un costo de 50 centavos cada una. Si las copias son más de 10 pero menos o igual a 100, entonces el costo es de 30 centavos. Para más de 100 copias, el costo por cada una es de 25 centavos.

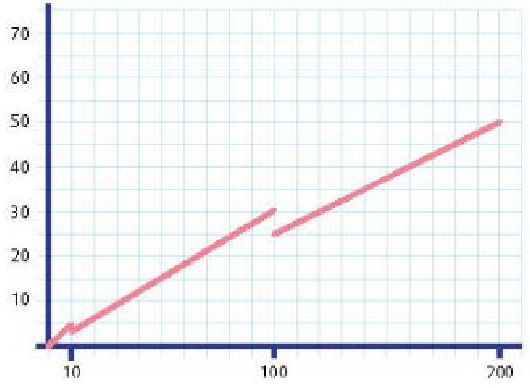
1. De acuerdo con la información anterior, completa la siguiente tabla de valores:

Número de copias	Costo en pesos
5	
10	
11	
50	
100	
101	
120	
150	
200	

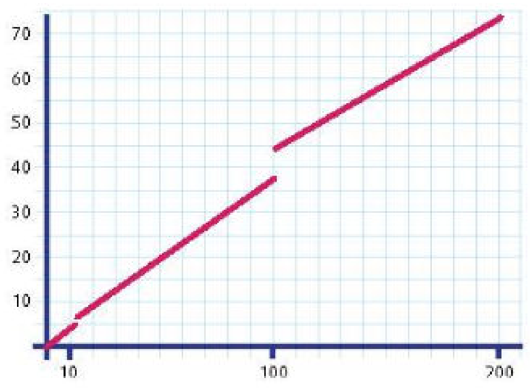
2. Comenta con tus compañeros:
   - ¿Qué sucede con los costos para 11 y 101 copias?
   - ¿Es conveniente para el cliente cómo se cobran las copias?, ¿qué le recomendarías? y ¿por qué?
   - ¿Qué gráfica representa el costo de las copias de acuerdo con la papelería?

Para tu apunte

Hasta ahora has estudiado las gráficas de la línea recta y funciones cuadráticas. Las gráficas como las de abajo se les llaman gráficas por secciones. Éstas pueden estar formadas por secciones rectas o curvas, y pueden tener saltos (tal como las dos anteriores); es decir, que la gráfica no esté unida por completo, o bien, puede cambiar de forma pero seguir unida (Ver la gráfica del EXPLORA).



▲ Gráfica 1.



▲ Gráfica 2.

• Velocidad cambiante

La siguiente tabla describe el movimiento de un automóvil. En ella se indica la velocidad en un lapso o el kilómetro en el que se localiza el automóvil en determinado tiempo.

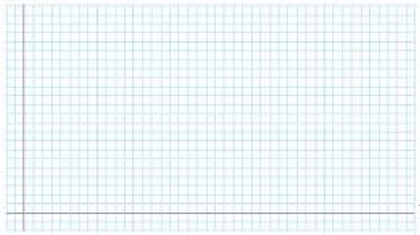
Tiempo en minutos	Descripción del automóvil
0	Posición: 0 kilómetros
0-10	Velocidad de 0.5 km/min
10	Posición: 5 kilómetros
10-20	Velocidad de 0.2 km/min
20	Posición: 7 kilómetros
20-30	Velocidad de 1 km/min
30	Posición: 17 kilómetros

1. Con la información de la tabla anterior completa la siguiente tabla de valores:

Tiempo en minutos	Posición en kilómetros
0	0
2	
4	
6	
8	
10	5
15	
20	7
22	
25	
28	
30	17

2. Realiza una gráfica que describa la posición del automóvil con respecto al tiempo. Grafica en el eje x el tiempo, puesto que es la variable independiente, y la posición en el eje y.

Posición



Tiempo

Para tu apunte

Cuando estudiaste Física en segundo grado, graficabas la distancia recorrida o la posición de un móvil, y cuando éste llevaba velocidad constante obtenías una línea recta. Mientras que, cuando el móvil presentaba aceleración constante, su gráfica era una parábola.

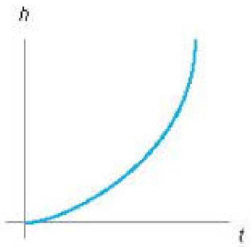
• Gráficas de llenado

Imagina que tienes tres tanques como los de los siguientes dibujos y que los tres se llenan con una llave de agua que administra la misma cantidad de agua a un mismo ritmo.

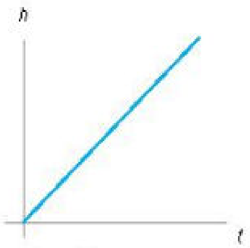
▲ Tanques de agua.

1. Responde:

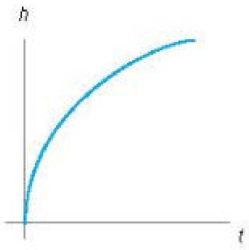
- ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a cada caso (A, B o C)? En cada una se ha graficado la relación entre la altura que alcanza el agua en el tanque en función del tiempo transcurrido.



▲ Gráfica 1.



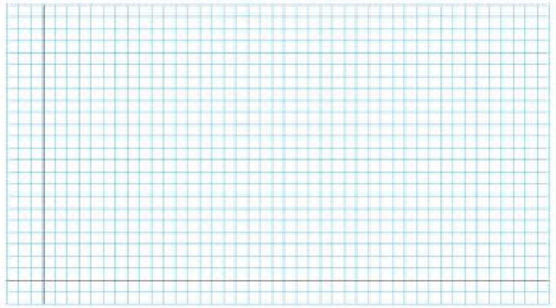
▲ Gráfica 2.



▲ Gráfica 3.

⇒ Compara tus respuestas con las de tus compañeros e intercambien puntos de vista junto con el maestro.

2. Traza en la cuadrícula un aproximado de la gráfica para el tanque que aparece enseguida. Considera que el tanque está completamente vacío y la cantidad de agua que cae es constante.



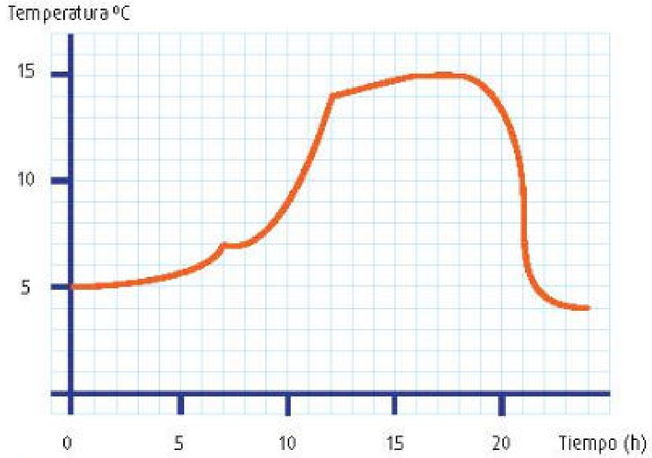
Para tu apunte

Algunos factores que debes considerar al trazar gráficas por secciones son:

- Definir qué magnitudes se establecerán en los ejes coordenados, es decir, cuál será la variable dependiente y cuál la independiente.
- Establecer la escala de los ejes coordenados.
- Definir cuántas secciones componen la gráfica.
- Revisar la situación que se presenta. Si la variación es un aumento, la gráfica crece a la derecha y hacia arriba (creciente). Si la variación es un decremento, la gráfica avanza a la derecha pero hacia abajo (decreciente). Además, si el aumento o decremento son constantes, entonces la gráfica es una línea recta.
- Recuerda que el tiempo siempre es la variable independiente, y por tanto, se gráfica en el eje x.

Pongámonos de acuerdo

En un día de invierno, en Monterrey se registraron las siguientes temperaturas en grados centígrados por cada hora:



Gráfica de temperatura.

1. Reunidos en parejas contesten las siguientes preguntas:
   - ¿A qué hora(s) se registró la temperatura más baja y cuál fue esa temperatura?
   - ¿A qué hora(s) se registró la temperatura más alta y cuál fue esa temperatura?
   - ¿Entre qué horas aumentó la temperatura?
   - ¿A partir de qué hora disminuyó la temperatura?
   - ¿Qué pasa con la temperatura de las 16:00 a 18:00 horas?
   - ¿A qué hora(s) aproximadamente se tuvo una temperatura de 10 °C?

De vuelta al Explora

1. Contesta las siguientes preguntas basándote en la gráfica presentada en el EXPLORA.
   - ¿Cuánta agua había al inicio en el tanque?
   - ¿Cuál fue la cantidad máxima de agua que alcanzó el tanque?
   - ¿En qué lapso(s) aumentó la cantidad de agua en el tanque?
   - ¿En qué lapso(s) disminuyó la cantidad de agua del tanque?
   - ¿En qué lapso(s) no aumentó ni disminuyó el volumen de agua en el tanque?
2. Completa la siguiente tabla de valores con base en la gráfica del EXPLORA:

Tiempo en minutos	Litros
0	
10	
20	
40	
60	

3. Describe una situación en el que un tanque de agua tenga este comportamiento y coméntalo con tus compañeros.

Practica

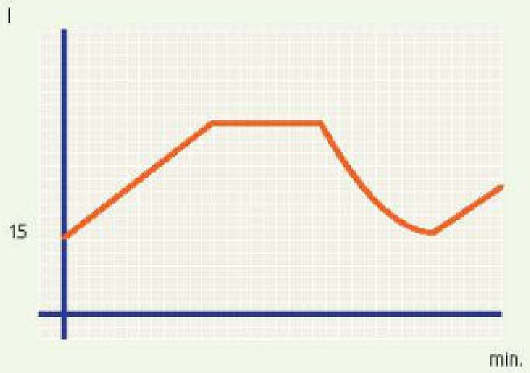
1. Traza una gráfica que describa la posición con respecto al tiempo de la siguiente situación: Francisco camina 4 m/s durante los primeros 30 segundos, luego corre 10 m/s los siguientes 40 segundos, se detiene por 15 segundos, continúa y trota a 8 m/s durante 35 segundos. Finalmente, regresa a la posición inicial caminando a 5 m/s.
2. Con ayuda de la gráfica que hiciste contesta lo siguiente:
   - ¿Cuál fue la posición más lejana de Francisco? y ¿en qué tiempo la alcanzó?
   - ¿Cuánto tiempo tardó en regresar Francisco a la posición inicial?
   - ¿Cuánto tiempo duró el recorrido de Francisco? y ¿cuánta distancia recorrió?
3. Completa la posición a la que se encontraba Francisco de acuerdo con el tiempo indicado:

Tiempo en segundos	Posición en metros
0	
15	
30	
50	
70	
85	
100	
120	
150	
200	
280	

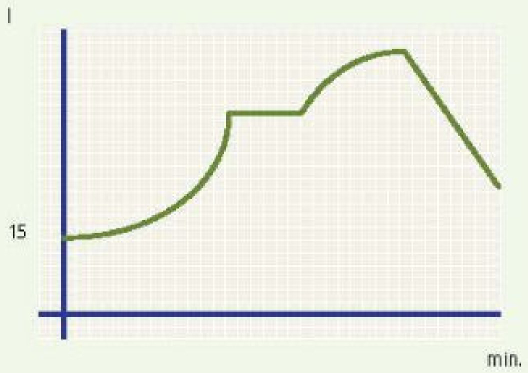
Evalúa tu avance

1. Cuál de las siguientes gráficas describe la capacidad en litros de agua de un tanque cilíndrico con respecto al tiempo en minutos, que inicialmente cuenta con 15 litros, los primeros 10 minutos aumenta su nivel, luego se mantiene durante 6 minutos, vuelve a incrementarse en los siguientes 15 minutos y finalmente baja su nivel hasta alcanzar una capacidad de 20 litros.

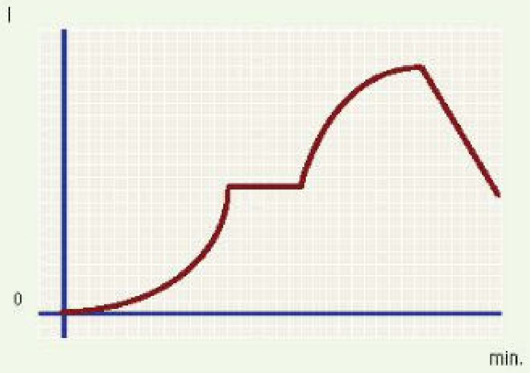
a.



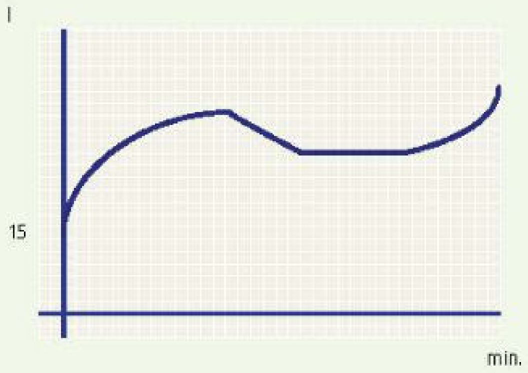
b.



c.



d.



2. ¿En qué intervalos de tiempo la cantidad de agua del tanque del problema anterior aumentó?
   a. 0 a 15 minutos
   b. 0 a 10 y 16 a 31 minutos
   c. 0 a 10 minutos
   d. 16 a 31 minutos

Nociones de probabilidad

Lección 20 **Calcularás la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto)**

Explora

Suerte en el examen

Al llegar a la clase el profesor de matemáticas anuncia a los alumnos que va a aplicar un examen sorpresa de cuatro problemas con dos opciones de respuestas en la que sólo una es correcta. Miguel no ha asistido a todas las clases y se siente nervioso pues no sabe las respuestas, así que decide contestar el examen al azar. ¿Qué probabilidad tiene Miguel de contestar los cuatro problemas correctamente?

Descubre y construye

- Los dados

Karla lanzará un dado dos veces y se pregunta sobre la probabilidad de que en ambos tiros obtenga seis.

1. Ayuda a Karla a completar todas las combinaciones posibles que hay para esos dos tiros:

1 y 1	1 y 2	1 y 3	1 y 4	1 y 5	1 y 6
	2 y 2				
			3 y 4		
4 y 1					
					5 y 6
		6 y 3			

2. Con la información de la tabla anterior, responde:
   - ¿Cuántas combinaciones posibles tendría Karla?
   - ¿En cuántas de éstas, en los dos tiros obtiene seis?
   - ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar en dos ocasiones un dado, se obtenga seis?
   - ¿Cuál es la probabilidad de que en el primer lanzamiento tire un seis?
   - Sea cual sea el resultado del primer lanzamiento, ¿cuál es la probabilidad de que en el segundo lanzamiento tire un seis?
   - ¿El segundo lanzamiento del dado es un evento independiente del primero? ¿Por qué?

Para tu apunte

La probabilidad puede ser expresada como una fracción, donde el numerador corresponde a las veces que puede suceder la condición que tú esperas que se cumpla y el denominador es el número total de respuestas posibles a ocurrir del evento. La probabilidad también puede expresarse en forma decimal o como porcentaje.

• Opciones para el fin de semana

El fin de semana Julia quiere ir al cine, o al teatro, o al museo. Aún no sabe si invitará a su amiga Laura o a su mamá.

1. Si Julia eligiera al azar tanto el lugar como la compañía responde: ¿cuál es la probabilidad de ir
   - al museo con Laura?
   - con Laura, sin importar el lugar?
   - al teatro, sin importar la compañía?
   - al cine con su mamá?
   - con Laura a un lugar donde permanezcan sentadas?
2. Haz una hipótesis de cómo se modificarían los cálculos si Julia incluye la opción de ir sola a cualquiera de los tres lugares.

Para tu apunte

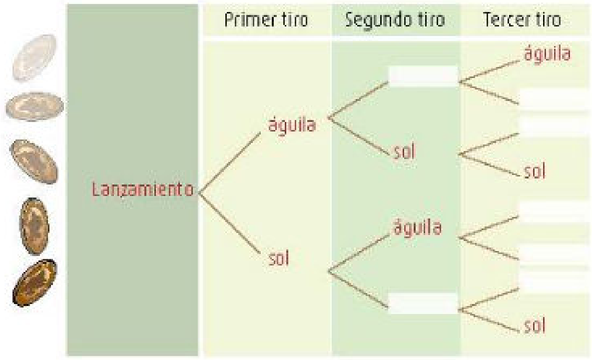
Cuando dos o más eventos son independientes, es decir, que la probabilidad de un segundo o tercer evento no le afecta lo ocurrido en un evento anterior, la posibilidad de que ocurran esos dos o más eventos, es igual a la multiplicación de las probabilidades individuales de cada evento.

$$P(A \text{ y } B) = P(A) * P(B)$$

• Águila o sol

Si Alejandro lanza una moneda al aire en tres ocasiones, ¿qué probabilidades tiene de que en los tres tiros obtenga águila?

1. Completa el siguiente diagrama de árbol en el que aparecen todas las posibles soluciones y marca con un color la que muestra que en los tres tiros la moneda caiga águila:



2. Con base en el diagrama anterior responde:
   - ¿Cuál es la probabilidad de que el primer tiro sea águila?
   - Una vez hecho el primer tiro, ¿qué probabilidad hay de que el segundo sea nuevamente águila?
   - Hecho el segundo tiro, ¿cuál es la probabilidad de que el tercero sea águila?
   - ¿Los tres tiros son eventos independientes? ¿Por qué?
3. Aplica la fórmula para obtener la probabilidad de que en los tres tiros caiga águila.

Para tu apunte

Los diagramas de árbol como el que se realizó en este problema son de gran utilidad como método para representar eventos sucesivos, en que se muestran todos los caminos de posibles soluciones. Sin embargo, son recomendables sólo cuando se tienen pocos eventos sucesivos con pocas posibilidades. En caso contrario, se utiliza la fórmula que presentamos en la pág. 154, la multiplicación de las probabilidades individuales.

Pongámonos de acuerdo

1. Junto con un compañero analiza la siguiente situación y contesta las preguntas planteadas más abajo.

   En una urna hay tres pelotas azules, dos amarillas, dos rojas y tres verdes. Si sacaras las pelotas al azar haciendo reemplazo, es decir, regresas las pelotas a la urna, una vez que ya viste el color de las que sacaste.
   - ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar dos pelotas sean azules?
   - ¿Cuál es la probabilidad de sacar una pelota roja y una verde?
   - ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos pelotas amarillas?
   - ¿Cuál es la probabilidad de sacar una pelota azul, luego una roja, y por último, una verde?
   - ¿Qué sucedería si no regresas las pelotas que vas sacando? Haz una hipótesis y coméntala con tus compañeros y tu maestro.

De vuelta al Explora

1. Calcula la probabilidad de que todos los problemas que contestará Miguel al azar sean correctos.
2. Representa con un diagrama de árbol las opciones posibles que tendrá Miguel si responde el examen al azar.

Practica

1. Si Lalo rifa una bicicleta y una patineta entre 10 amigos y 5 amigas y todos participan en ambas rifas.
   - ¿Cuál es la probabilidad de que en las dos ganen mujeres?
   - ¿Cuál es la probabilidad de que gane la bicicleta y la patineta la misma persona?

2. Si sacas al azar una carta de una baraja inglesa (esta baraja tiene 52 unidades):
   - ¿Cuál es la probabilidad de que esa carta sea una reina, la regreses y luego saques un rey?
   - ¿Cuál es la probabilidad de que saques una carta de tréboles, la regreses de nuevo y luego saques una carta de corazones?
3. Al tirar un dado y una moneda, ¿cuál es la probabilidad de sacar un número mayor de cuatro y un sol?
4. Si María tiene dos faldas, tres shorts, un pantalón, un par de tenis, un par de zapatos y un par de sandalias. ¿Qué probabilidad tiene de que al elegir al azar, vista con falda y sandalias?

Evalúa tu avance

1. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar una moneda cuatro veces, se obtenga águila en las cuatro?

   a. $\frac{2}{3}$

   b. $\frac{1}{2}$

   c. $\frac{1}{4}$

   d. $\frac{1}{16}$

2. ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos cartas de la baraja inglesa y que sean de color negro?

   a. $\frac{1}{4}$

   b. $\frac{2}{52}$

   c. $\frac{2}{26}$

   d. $\frac{1}{2}$

Evaluemos lo aprendido

✓ Evaluación tipo Planea

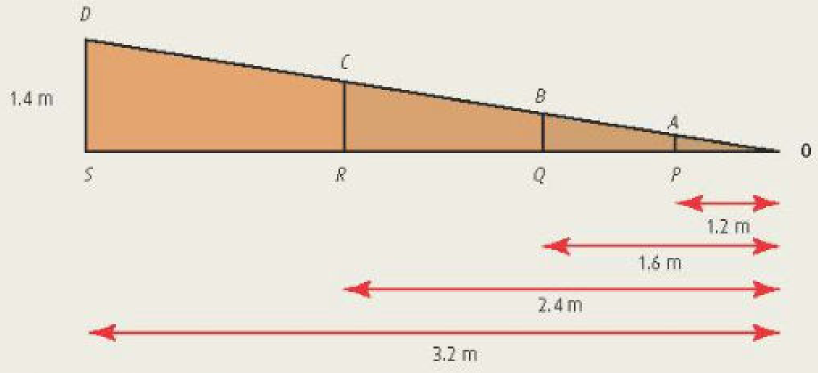
Subraya la opción que consideres correcta y, al terminar, con la guía del maestro, revisa en grupo tus respuestas.

1. Sergio recién vio en clase la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas. Durante una clase posterior, el profesor lo pasó al frente a resolver la ecuación $8x^2 - 2x - 3 = 0$. A pesar del nerviosismo, logró resolverla acertadamente.
   - ¿Cuáles fueron las soluciones que obtuvo?

   a. 3 y −1   b. $\frac{-3}{4}$ y 2   c. $\frac{3}{4}$ y $\frac{-1}{2}$ d. $\frac{-1}{2}$ y $\frac{-3}{4}$

2. En clase, Lorena está teniendo dificultades con el cálculo mental del discriminante de una ecuación cuadrática ya que debe responder con prontitud, cuántas y de qué tipo son las soluciones que tiene la ecuación $9x^2 + 12x + 4 = 0$. Pide ayuda a sus compañeros para llevar a cabo los cálculos y con la información obtenida toma una decisión.
   - ¿Cuál fue su respuesta si contestó correctamente?
     a. Dos raíces reales diferentes.
     b. Dos raíces reales e iguales.
     c. No hay raíces reales (son dos raíces complejas).
     d. No se puede determinar.

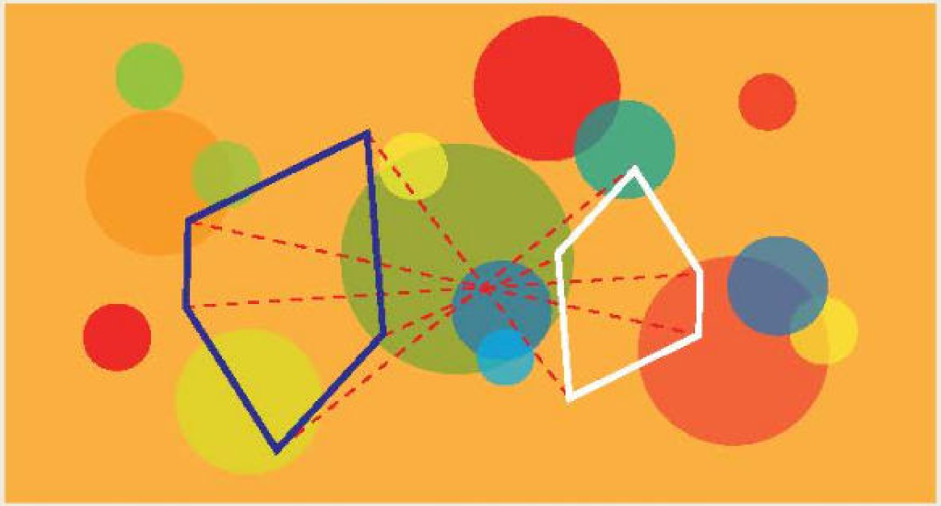
3. El tío de Tomás es arquitecto y se ha ofrecido a construir una rampa en la escuela de su sobrino con el fin de que haya un mejor acceso a un foro del centro escolar. Bosqueja un diseño como el siguiente para su construcción, en donde la rampa estará sostenida por las tres columnas colocadas a las distancias que se especifican, tal y como se muestra.



Tomás le pide a su tío que le permita participar en el proceso de construcción de la rampa. Sabedor de los conocimientos de geometría sobre el teorema de Tales que posee su sobrino, su tío le pide que calcule las alturas de las tres columnas.

- ¿Cuáles son los valores de las alturas que deberá reportar Tomás a su tío para las columnas $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$ y $\overline{CR}$?
  - **a.** 0.35 m, 0.7 m y 1.05 m, respectivamente.
  - **b.** 0.525 m, 0.93 m y 1.05 m, respectivamente.
  - **c.** 0.525 m, 0.7 m y 1.12 m, respectivamente.
  - **d.** 0.525 m, 0.7 m y 1.05 m, respectivamente.

4. De camino a casa después de un día de escuela, Emilio observa un mural pintado sobre una pared. De inmediato, percibe que una parte del mismo, la cual se muestra a continuación, presenta un par de figuras con homotecia; tras contemplarlo por unos instantes, estima que la razón de homotecia debe ser:



- **a.** Positiva.
- **b.** Igual a 1.
- **c.** Negativa.
- **d.** Mayor que 0 pero menor que 1.

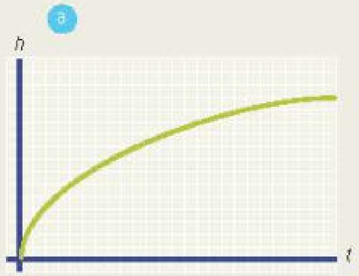
5. Miranda asiste al entrenamiento de su equipo de fútbol favorito. Durante el mismo, observa al portero realizar despejes de meta y se asombra al mirar la altura que toman. Hace un dibujo de uno de ellos y, tomando como punto de referencia el lugar de donde se despeja y considerando las dimensiones de la cancha, se da cuenta de que dibujó una parábola, la cual está determinada por una función cuadrática.

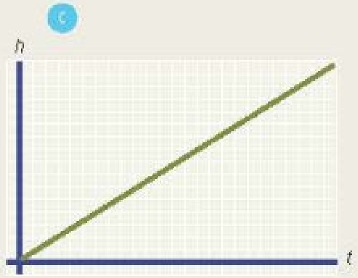
- ¿Cuál de las siguientes funciones representa la que dibujó Miranda?

a. $y = \frac{x^2}{12} - 5x + 65$ **b.** $y = \frac{x^2}{30} - 3x$ **c.** $y = -\frac{x^2}{12} - 5x - 65$ **d.** $y = 2x - \frac{x^2}{9}$

6. Durante una visita escolar a la Torre Panamericana, la cual cuenta con 30 pisos y un mirador en la parte superior, Sofía y un grupo de amigas utilizaron el elevador en repetidas ocasiones. En uno de los trayectos se les ocurrió medir el tiempo que le tomaba al elevador ir desde la planta baja hasta el último piso, incluidas las paradas que hacía para permitir la entrada y salida de usuarios. Al final, con la información recolectada, trazaron una gráfica que relaciona la altura alcanzada por el elevador y el tiempo que le toma ascender, incluidas sus pausas.

- ¿Cuál de las siguientes gráficas representa mejor la información recolectada por Sofía y sus amigas?





7. Jacqueline se encuentra en un dilema: tiene que elegir entre varias opciones para salir este fin de semana, las cuales contemplan ir de paseo en bicicleta al parque, ir al cine, al museo de ciencias y tecnologías o asistir a una muestra de danza. Además, debe decidir con quién saldrá: con sus padres, con su hermana Daniela y sus primas, con Renata y otras amigas, con su amigo Christian y otros compañeros de la escuela, o simplemente salir por su cuenta. Todas las actividades le atraen por igual y no tiene preferencia por algún acompañante en particular. Tras pensarlo un buen tiempo y no poder decidirse, resuelve dejar su elección a la suerte, por lo que coloca papeles con las diferentes opciones en dos vasos distintos: uno contiene los acompañantes y el otro los sitios a los que puede ir.

- ¿Cuál es la probabilidad de que Jacqueline vaya al cine con Christian y sus compañeros de escuela?

a. $\frac{1}{5}$

b. $\frac{1}{20}$

c. $\frac{9}{20}$

d. $\frac{1}{4}$

8. De las siguientes ecuaciones cuadráticas, cuál de ellas tiene la característica que sus soluciones sean negativas y diferentes:

a. $x^2 - 16x + 64 = 0$

b. $2x^2 + 5x + 3 = 0$

c. $x^2 + 2x - 24 = 0$

d. $x^2 + 2x + 1 = 0$

✓ Evaluación tipo PISA

László Biro y el bolígrafo

Los bolígrafos, comúnmente llamados plumas, fueron inventados por László Biro y tienen el mismo funcionamiento que los desodorantes de bolita o roll-on. De hecho, el método de aplicación de estos desodorantes también fue inventado por el mismo Biro. En el interior de los bolígrafos, originalmente nombrados esferógrafos, la tinta se encuentra en estado prácticamente líquido (tal como puede atestiguarlo cualquiera a quien se le haya chorreado la tinta de una pluma); esta tinta es dispensada en el papel por una esfera, misma que se encuentra en la punta de la pluma, y se seca casi instantáneamente.

▲ El bolígrafo de Biro se conocía en Argentina como "esferográfica" o "birome".

▲ Los desodorantes de bolita o roll-on son muy prácticos y dejan una sensación de frescura agradable en la piel.

1. Con el fin de comprender de mejor manera el funcionamiento de un bolígrafo, realiza lo siguiente:
   - ⇒ Consigue una pelota pequeña, puede ser una canica o un balín, una cartulina blanca, un recipiente al cual se le verterá agua y un colorante vegetal (puedes usar la tinta de tu pluma).
   - ⇒ Después de mezclar algunas gotas de colorante en el agua y que ésta haya adquirido un color uniforme, introduce tu pelota en el recipiente con el fin de entintarla; luego, hazla rodar sobre la cartulina. Notarás que al avanzar deja un trazo marcado sobre ella.
   - ⇒ Realiza un diseño aleatorio lanzando repetidas veces la pelota sobre la cartulina. Puedes combinar distintos colores de líneas para mejorar tu diseño si así lo deseas, preparando más muestras de tintas a partir de otros colorantes.

▲ Con un experimento como el de las fotografías, Ladislao Biro cambió la vida de la gente al inventar el bolígrafo ya que antes se tenía que llenar la pluma estilográfica con un tintero.

2. Una vez que termines tu diseño, y tras observar los trazos que dejaste marcados sobre la hoja, explica a detalle con tus palabras cómo funcionan los bolígrafos y los desodorantes de roll-on.

3. Al reverso de la cartulina, siguiendo el procedimiento antes mencionado para trazar líneas:
   ⇒ Dibuja un triángulo.
   ⇒ Luego, realizando las mediciones necesarias, traza dos triángulos más, uno que sea congruente al inicial, y otro que sea semejante, en el que cada uno de sus lados mida la mitad que el original.

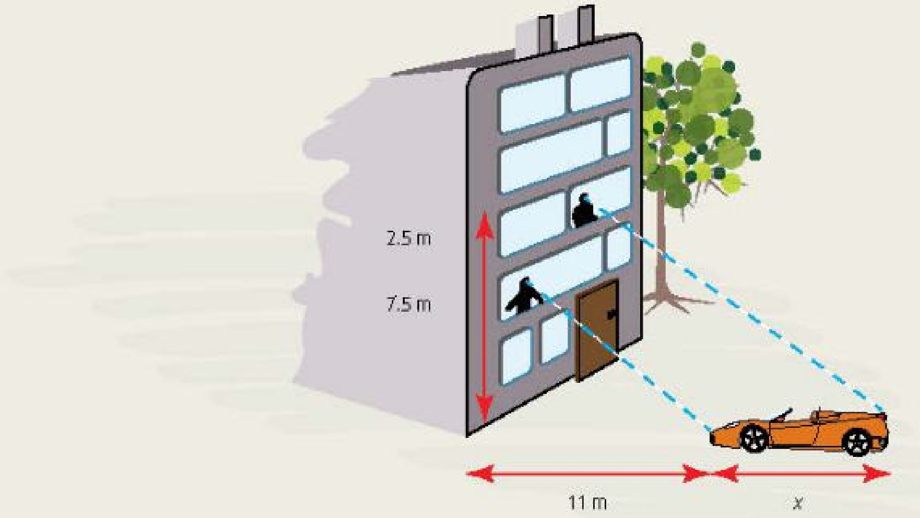
4. Y por cierto, hablando de plumas, fabricar este artículo requiere de un buen control de calidad, de lo contrario, la marca podría desprestigiarse y no venderse. En una empresa dedicada a la fabricación de bolígrafos, su estudio de control de calidad arrojó como resultados que de cada 350 plumas de tinta negra, 220 de tinta azul y 270 de tinta roja confeccionadas, 33, 21 y 49 de ellas, respectivamente, presentan defectos de fabricación que les impiden funcionar adecuadamente. Si como parte del estudio de calidad se eligen al azar dos plumas:
   • ¿Cuál es la probabilidad de que ambos bolígrafos resulten defectuosos si se toman primero una pluma de tinta negra y luego una azul?
   • ¿Y cuál sería si se toman primero una pluma de tinta negra y luego una roja?

Resulta de mucha importancia valorar el desarrollo tecnológico que implica la fabricación de los bolígrafos y cómo estos han impactado en la forma de comunicar y preservar, no sólo los conocimientos matemáticos, sino de la cultura en general.

El automóvil del vecino

En el edificio de departamentos en que vivo hay un inquilino que tiene un auto de estilo deportivo; él es hermano de un compañero de clase y habitan en el segunda piso del edificio, mientras que yo vivo en el tercero.

Cierto día miraba por la ventana de mi departamento cuando, al mismo tiempo, mi amigo hacía lo propio. Nos sorprendimos al notar que en ese instante, al mirar hacia la calle con una línea visual con la misma inclinación en donde estaba el vehículo estacionando, yo podía ver la parte trasera del auto y mi amigo el frente.



1. Si observas detenidamente la imagen que modela la situación anterior, notarás que se forman un par de triángulos.
   ⇒ Demuestra que ambos son semejantes y especifica el criterio de semejanza que lo prueba.

2. Con base en la información proporcionada en la imagen:
   • ¿Cuál es el largo del automóvil?

3. Un día salí a pasear con mi amigo Luis en su auto. Viajábamos por carretera a una velocidad de 30 km/h cuando, al llegar a un tramo recto, Luis comenzó a acelerar el auto a razón constante de 7 km/h cada segundo durante 10 segundos. Tras analizar lo sucedido, modelamos la situación con la expresión algebraica: $d = 8.33t + 0.972t^2$, donde d es la distancia recorrida, t es el tiempo transcurrido y las velocidades fueron convertidas a unidades de metros/segundo.
   ⇒ Construye una gráfica que relacione la distancia recorrida por el auto contra el tiempo, durante los 10 segundos que viajó en línea recta.
      • ¿En cuánto tiempo recorrió los primeros 50 metros en línea recta?

BLOQUE 4

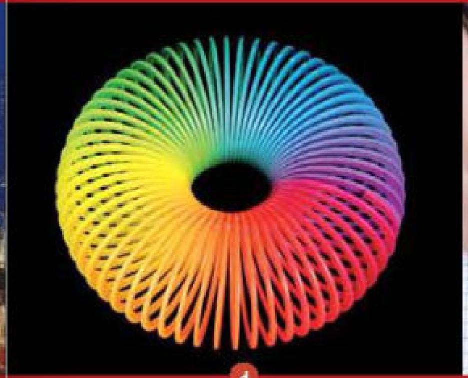
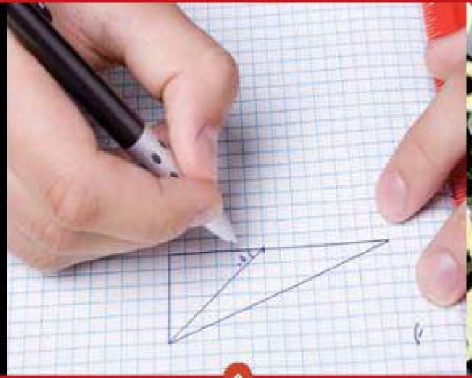
B4

COMPETENCIAS

- Resolver problemas de manera autónoma.
- Comunicar información matemática.
- Validar procedimientos y resultados.
- Manejar técnicas eficientemente.


a

b

c

d

e

f

a. Figuras geométricas en tres dimensiones.

b. La pendiente recta la podemos comparar con la indinación de una escalera.

c. Los contenedores cilíndricos son muy utilizados para almacenar distintos tipos de líquidos y fluidos.

d. Con el juguete llamado *slinky* se pueden realizar muchos experimentos caseros.

e. Una hoja cuadriculada te servirá de guía para trazar los triángulos rectángulos.

f. Los tubos son objetos cilíndricos, huecos y alargados que están abiertos por sus dos extremos.

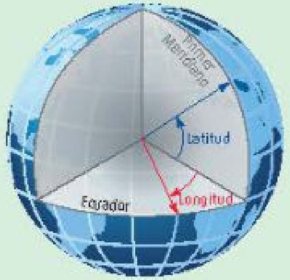
APRENDIZAJES	EJES / TEMAS Y LECCIONES: SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO	FORMA, ESPACIO Y MEDIDA	MANEJO DE LA INFORMACIÓN
• Utilizarás en casos sendllos expresiones generales cuadráticas para definir el enésimo término de una sucesión. • Resolverás problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente. • Calcularás y explicarás el significado del rango y la desviación media.	**Patrones y ecuaciones** L21 Obtendrás una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.	**Figuras y cuerpos** L22 Analizarás las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semidrculo y un rectángulo. Construirás desarrollos planos de conos y cilindros rectos.	**Proporcionalidad y funciones** L26 Calcularás y analizarás la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificarás la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa.
		Medida L23 Analizarás las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.	**Análisis y representación de datos** L27 Medirás la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Analizarás las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión.
		L24 Analizarás las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.	
		L25 Explicitarás el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.	

Engánchate

Cómo ubicarse en la Tierra

Latitud y longitud son palabras usadas para referirse a la localización de un lugar. ¿Conoces su significado?

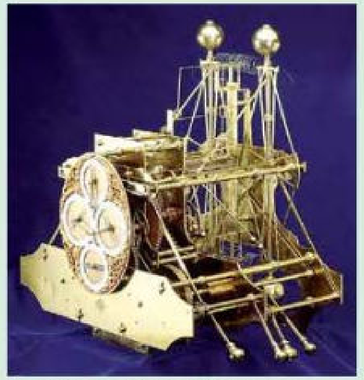
Tanto latitud como longitud son medidas angulares para señalar un lugar en la Tierra. La latitud mide la distancia (angular) entre el Ecuador y un punto en el planeta, a lo largo de un meridiano. Es decir, si el punto se encuentra sobre el Ecuador, la latitud es cero, si se ubica en el Polo Norte, su latitud es de +90° (o 90° N) y si se encuentra en el Polo Sur, su latitud es de –90° (o 90° S).



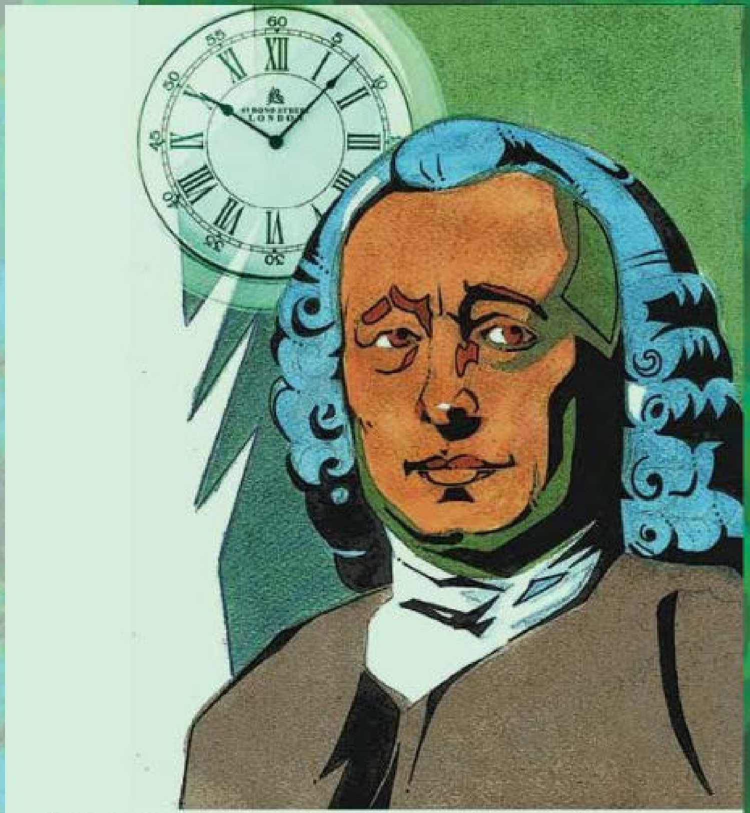
Modelo de mapamundi con latitud y longitud.

Imagina la importancia de conocer la latitud y la longitud en una época anterior al GPS. Aunque tengas un mapa muy preciso, si no sabes dónde estás (especialmente en el mar), no hay manera de poder usarlo. Muchas expediciones se perdieron por no poder ubicarse en el mar (aún viendo las estrellas).

La latitud se podía encontrar usando un instrumento llamado sextante, pero no fue sino alrededor de 1760 que se encontró un método fiable para calcular la longitud. El secreto fue ¡un reloj!



Reloj inventado por John Harrison, National Maritime Museum de Greenwich.



John Harrison, carpintero metido a relojero, inventó varios relojes precisos.

Desde luego que no fue un reloj cualquiera. John Harrison, su inventor, tuvo que crear nuevos mecanismos para que éste mantuviera la hora aún con el vaivén de un barco. ¿Te imaginas un reloj de péndulo en una tormenta?

- ¿Cómo crees que el uso de un reloj sirve para calcular la longitud? Utiliza en tu respuesta los conocimientos que tienes de geografía, de física y de matemáticas.

Lee más...

Acerca de John Harrison: http://www.inforeloj.com/spa/item/longitud_harrison.html

Libros del rincón: Boulagner. Philippe, *Los mil y una noches de la ciencia*, México, Ma non Tropo, 2005.

Patrones y ecuaciones

Lección 21 Obtendrás una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión

Explora

El campeón en las olimpiadas

Tadeo y Ubaldo están concursando en la Olimpiada Nacional de Matemáticas. A ambos se les presenta la siguiente sucesión numérica:

7 23 51 91 143

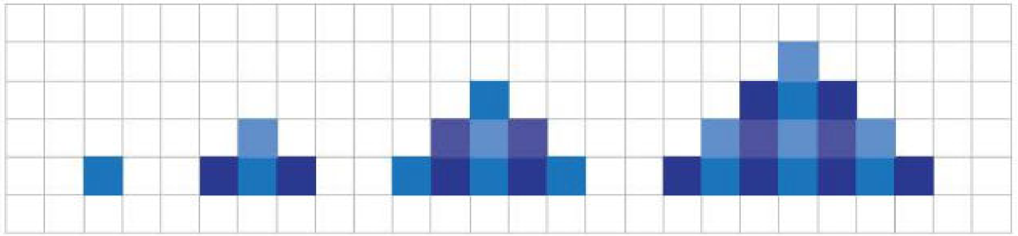
y se les pregunta cuáles son los siguientes dos términos. Tadeo responde que son 183 y 217; mientras que Ubaldo dice que los términos son 207 y 283.

- ¿Quién de los dos está en lo correcto? y ¿por qué?

Descubre y construye

• ¿Cuántos cuadritos?

1. Anota la cantidad de cuadritos que se necesitan para construir cada una de las torres de abajo.



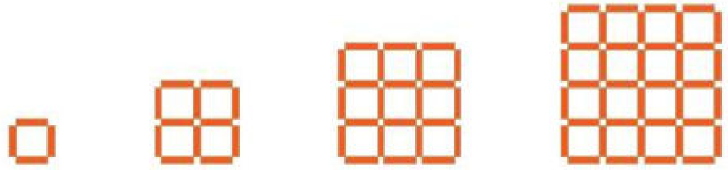
2. Siguiendo el patrón, ¿cuántos cuadritos se necesitan para construir la quinta torre?, ¿y la sexta?
3. Completa la sucesión de acuerdo con el número de cuadritos necesarios para construir torres como las anteriores:

   1, ___, 9, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ...

   - ¿Cuántos cuadritos se necesitarán para construir la trigésima torre? Compara tu resultado con el de tus compañeros.
4. Escribe una expresión general para la sucesión del número de cuadritos necesarios para construir la primera, segunda, tercera, cuarta, quinta, ... , enésima torre.
   - ¿Cómo descubriste la expresión general para esta sucesión? Coméntalo con tus compañeros.

• Palillos de madera

1. De acuerdo con la secuencia presentada en el siguiente dibujo, encuentra una expresión general para encontrar la cantidad de palillos de madera que se necesitan para construir cualquier figura. Después, calcula cuántos palillos se necesitan para construir la figura 50.



▲ Figura 1 ▲ Figura 2 ▲ Figura 3 ▲ Figura 4

2. Anota la sucesión formada por la cantidad de palillos necesarios para las figuras 1, 2, 3 y 4.
   - Sucesión principal:
3. Calcula la cantidad de palillos necesarios para construir la figura 5 y anótala en la sucesión principal.
   - ¿Qué hiciste?
   - ¿Será conveniente hacer lo mismo para calcular los palillos de la figura 50?, ¿por qué?
4. Aplica el método diferencias de diferencias a la sucesión principal para verificar si se trata de una expresión cuadrática.

Sucesión principal ___, ___, ___, ___, ___, ...

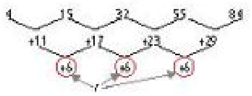
Primeras diferencias ___, ___, ___, ___, ...

Segundas diferencias ___, ___, ___, ...

Para tu apunte

Una forma eficiente para identificar si una sucesión puede ser representada por una expresión cuadrática, esto es, de la forma $ax^2 + bx + c$, es utilizando el método diferencias de diferencias. Éste consiste en encontrar las diferencias que hay entre término y término de la sucesión principal, y una vez halladas éstas, volver a encontrar las diferencias que hay pero ahora entre los valores antes hallados.

Supongamos que se tiene la siguiente sucesión:



Si las segundas diferencias son iguales como aquí, entonces la sucesión principal tiene la forma $ax^2 + bx + c$. El coeficiente del término cuadrático (a), se calcula dividiendo entre 2 el último valor encontrado (r):

$$a = \frac{r}{2} = \frac{+6}{2} = +3$$

Por lo tanto, la expresión cuadrática comienza con $(+3)x^2 = 3x^2$. Posteriormente, se evalúan de 1 en 1 en la expresión $3x^2$:

$3x^2$: 3, 12, 27, 48, 75, ...

y se verifica que coincida con la sucesión principal. Si coincide significa que los coeficientes b y c son iguales a cero y la expresión sólo tiene término cuadrático. Si no es el caso, como en este ejemplo, se restan los términos de la sucesión principal con los obtenidos anteriormente:

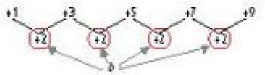
Sucesión principal:	4	15	32	55	84	...
Sucesión $3x^2$:	3	12	27	48	75	...
	+1	+3	+5	+7	+9	...

Si las restas encontradas tienen el mismo valor, significa que b es igual a cero, y c es igual al valor de las restas, y por lo tanto, la expresión es de la forma

> continúa en página siguiente

>>

$ax^2 + c$. Si las restas no son un mismo valor, como en este ejemplo, entonces b es diferente de cero y su valor es igual a la diferencia que hay entre cada resta calculada anteriormente:



Con los valores de $a = 3$ y $b = 2$, se tiene la expresión $3x^2 + 2x$. Nuevamente se evalúa de 1 en 1:

$3x^2 + 2x$: 5, 16, 33, 56, 85, …

Se compara con la sucesión principal. Si coincide significa que el coeficiente c es igual a cero y la expresión queda de la forma $ax^2 + bx$. Si no coincide, como ocurre en este caso, nuevamente se restan los términos de la sucesión principal con las evaluaciones anteriores:

Sucesión principal:	4	15	32	55	84	…
Sucesión $3x^2 + 2x$:	5	16	33	56	85	…
	-1	-1	-1	-1	-1	…

Este último valor es el de c. Por lo tanto, $a = 3$, $b = 2$ y $c = -1$; y la expresión general de la sucesión principal es: $3x^2 + 2x - 1$.

- ¿Es expresión cuadrática?
- ¿Cuál es el valor de r?
  - ⇒ Calcula el valor de $a = \frac{r}{2}$ (donde a es el coeficiente del término cuadrático).
  - ⇒ Evalúa de 1 en 1 en la expresión ax^2 con el valor de a encontrado:

$$ax^2 = \_\_\_ \; x^2 \rightarrow \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, \dots$$

- ¿Esta sucesión es igual a la sucesión principal?

5. Siguiendo el método, encuentra los valores para b o c restando los términos de la sucesión principal y la sucesión ax^2:

Sucesión principal:						…
Sucesión _____ x^2:						…

- ¿Los resultados de estas restas son todos iguales?
- ¿Cuál es el valor de b?
  - ⇒ Si $b \neq 0$, entonces evalúa de uno en uno, ahora con los valores de a y b encontrados en la expresión $ax^2 + bx$ y compara con la sucesión principal.

$$ax^2 + bx = \_\_\_ \; x^2 + \_\_\_ \; x \rightarrow \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, \dots$$

- ¿Esta sucesión es igual a la sucesión principal?
- ¿Cuál es el valor de c?
- Finalmente, ¿cuál es la expresión general de la sucesión principal que representa la cantidad de palillos necesarios para construir las figuras?
- ¿Cuántos palillos se necesitan para la figura 50?

• Cada vez más cerca

Un objeto que se deja caer libremente registra las siguientes alturas dadas en metros:

995.1 980.4 955.9 921.6 877.5

1. Encuentra una expresión para la sucesión anterior.
2. Verifica si la sucesión anterior se representa con una expresión cuadrática. De ser así:
   - ¿Cuál es el valor de r? (Considera los signos de las diferencias.)
   - ¿Cuál es el término cuadrático?
3. Utilizando alguno de los métodos antes vistos encuentra los coeficientes de la expresión cuadrática.

4. De acuerdo con la sucesión presentada:
   - ¿Cuál es la siguiente altura registrada?
   - ¿Cuál será la décima altura registrada?
   - Al calcular la decimoquinta altura, se obtiene resultado negativo. ¿Tiene sentido este resultado? Coméntalo en el grupo y con tu maestro.

Pongámonos de acuerdo

Un móvil comienza a avanzar desde cierta posición con respecto a un punto fijo. Carlos registra las posiciones del móvil. Si los registros anotados siguen esta sucesión:

29, 46, 61, 74, 85, …

1. Junto con un compañero, calculen el sexto y séptimo registro.
2. Ahora respondan:
   - ¿Qué sucede con la posición del móvil conforme Carlos toma más registros?
   - ¿Qué significado tiene eso con respecto al punto fijo?
3. Apliquen uno de los dos métodos presentados anteriormente para encontrar la expresión general en la sucesión de posiciones y así poder calcular otros registros.
4. Utilicen la expresión general para encontrar los siguientes registros:

   29, 46, 61, 74, 85, ___, ___, ___, ___, ___, ___, …

   - ¿Qué sucede del registro núm. 10 en adelante en la sucesión?, ¿qué significa esto?
   - ¿Qué anotó Carlos en el registro núm. 20?
5. Júntense con otro equipo que haya usado un método distinto al de ustedes y comparen sus procedimientos. Verifiquen que ambos lleguen a la misma expresión general.

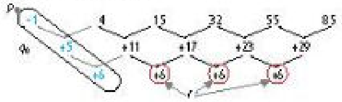
De vuelta al Explora

1. Retoma la situación del EXPLORA y responde:
   - ¿Con quién estás de acuerdo sobre su respuesta en los términos de la sucesión?
2. Explica por qué estás de acuerdo con él.
3. Escribe la expresión general de la sucesión.
4. Encuentra el quincuagésimo término de la sucesión.

Para tu apunte

Otro método para encontrar la expresión general de una sucesión, una vez que ya se verificó que se trata de una cuadrática, es mediante unas fórmulas. Se establecen las variables p_n para los términos de la sucesión principal y q_n para las primeras diferencias:

Posteriormente, se prolongan a la izquierda los valores p_0 y q_0, de acuerdo con la secuencia:



Los coeficientes a, b y c de la expresión cuadrática se calculan mediante las siguientes fórmulas:

$$a = \frac{r}{2} \qquad b = q_0 - a \qquad c = p_0$$

$$a = \frac{+6}{2} = 3 \qquad b = 5 - 3 = +2 \qquad c = -1$$

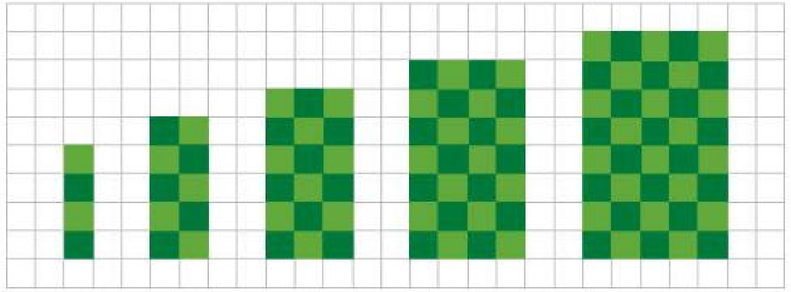
Y tiene como expresión general:

$$3x^2 + 2x - 1.$$

- ¿Ya descubriste la utilidad de encontrar la expresión general que representa la sucesión?
  - ⇒ Haz una hipótesis sobre cuál será su uso, particularmente cuando te piden términos grandes como 35, 78 o 1260 de la sucesión.

Practica

1. De las siguientes sucesiones elige aquellas que se representan mediante una expresión cuadrática.
   a. 49, 46, 41, 34, 25, ...
   b. 4, 12, 20, 28, 36, 44, ...
   c. 3, 7, 13, 21, 31, ...
   d. 5, 12, 21, 32, 45, ...
   e. 1, 8, 27, 64, 125, ...
2. Encuentra la expresión general para cada una de las siguientes sucesiones:
   a. 4, 19, 44, 79, 124, ...
   b. 2, 9, 18, 29, 42, ...
   c. 1, 6, 15, 28, 45, ...
3. Escribe una expresión general que describa la cantidad de cuadritos necesarios para cada figura:



▲ Figura 1 ▲ Figura 2 ▲ Figura 3 ▲ Figura 4 ▲ Figura 5

4. Del problema anterior, calcula la cantidad de cuadritos necesarios para la figura 40.
5. Diseña un ejercicio para tus compañeros en el que tú les des la sucesión y ellos tengan que encontrar la expresión o fórmula que la define. Intercambien los ejercicios y evalúen sus resultados.

Evalúa tu avance

1. De las siguientes sucesiones, indica cuál(es) **no** es (son) representada(s) por una expresión cuadrática:
   a. 3, 12, 27, 48, 75, ...
   b. 7, 10, 15, 22, 31, ...
   c. 2, 6, 18, 54, 162, ...
   d. 1, 4, 9, 16, 25, ...
2. Cuál es el centésimo término de la sucesión: 6, 14, 24, 36, 50, ...
   a. 600
   b. 10 500
   c. 1 500
   d. 15 000

Figuras y cuerpos

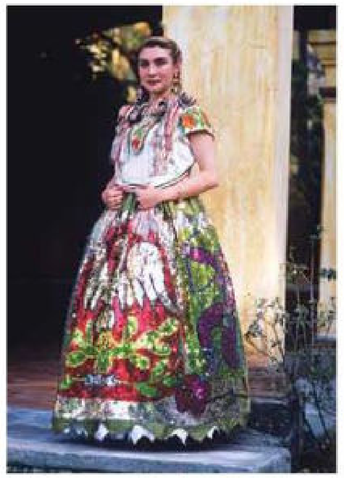
Lección 22

Analizarás las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construirás desarrollos planos de conos y cilindros rectos

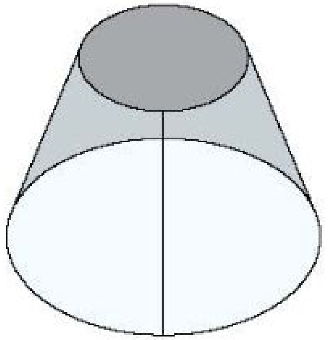
Explora

Las chinas poblanas

Uno de los trajes típicos de las mujeres en el estado de Puebla es el de la china poblana. La falda de dicho traje es semicircular y tiene forma de un cono truncado tal como se muestra en las ilustraciones.



▲ El colorido y el emblema del traje de china poblana lo han convertido en el traje nacional por excelencia.



▲ La falda —llamada también zagalejo—, debe llegar hasta los tobillos. Originalmente era confeccionada con una tela llamada castor.

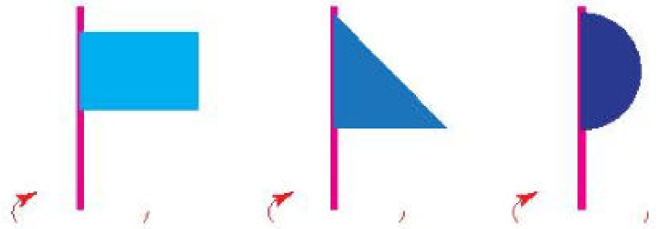
- ¿Cuánta tela tendrá que comprar Areli para hacerse la falda del traje, si su cintura es de 65 centímetros y el largo de la falda tiene que ser de 1.20 metros?

Descubre y construye

• La pirinola

Para la siguiente actividad necesitas unas tijeras, unos palillos y papeles de colores.

1. Recorta un rectángulo, un triángulo rectángulo y un semicírculo, de tal manera que uno de los lados de las primeras figuras o el diámetro del semicírculo sea más pequeño que el largo del palillo. Luego, pega las figuras anteriores a los palillos como se muestra en seguida y gíralos sobre su eje.



2. Responde:
   - ¿Qué figura resulta al girar el rectángulo? Dibújala.
   - ¿Qué figura resulta al girar el triángulo rectángulo? Dibújala.
   - ¿Qué diferencia habría entre las figuras formadas al girar un rectángulo con el ancho pegado al palillo y otro rectángulo del mismo tamaño pero con el largo pegado al palillo?

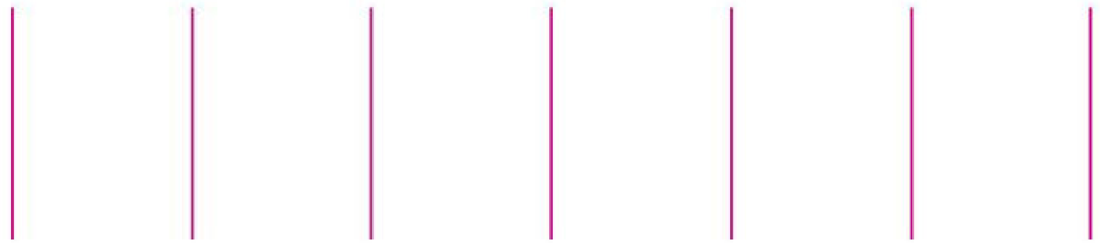
3. Antes de hacer girar el semicírculo, haz una hipótesis sobre cuál figura se generará al hacerlo girar.
   - ¿Qué figura resulta al girar el semicírculo? Dibújala en tu cuaderno.
4. Haz lo mismo con un trapecio, un rombo o cualquier otra forma que se te ocurra usando el mismo eje de simetría, y responde las siguientes preguntas para cada caso:
   - ¿Qué figura resulta al girar los recortes en cada caso? Dibújalas.
   - ¿Cómo cambia la figura formada si se pega el recorte de otro de sus lados al palillo como se hizo en el caso del rectángulo?

Para tu apunte

En matemáticas, se le llama **eje de revolución** al eje en donde se revoluciona una figura plana (el palillo) y al sólido resultante se le llama **sólido de revolución**.

5. Observa las figuras de los siguientes floreros que aparecen abajo y responde:
   - ¿Qué figuras tendrías que hacer para que al rotar el palillo resulten estas formas?

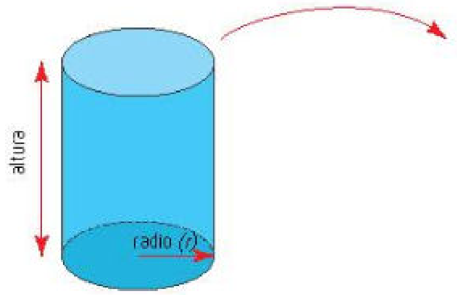
   ⇒ Dibújalas en los palillos de abajo.



• Caja cilíndrica

Para que no se maltraten los pinceles, en la clase de Arte el maestro quiere fabricar una caja cilíndrica que tenga 35 centímetros de alto y un diámetro de 12 centímetros. ¿Cómo la construirías?

1. Una vez que conoces el tamaño deseado, responde las siguientes preguntas:
   - Al descomponer y extender la caja cilíndrica en un plano con tapas arriba y abajo, ¿qué figuras planas lo componen? Dibújalas.



▲ Dibujo de la caja cilíndrica.

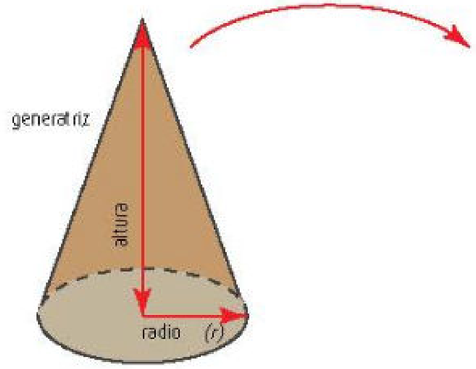
Para tu apunte

Generatriz es la línea o curva que al girar alrededor de un eje fijo generará el cuerpo.

- ¿Cuáles son las medidas de las figuras planas que dibujaste? Anótalas sobre tu dibujo.
- ¿Cuál sería la fórmula para calcular el área total del plano de la caja cilíndrica?
- ¿Existe otra manera de colocar los círculos tangentes al rectángulo de tal manera que aún quede un cilindro al momento de doblarlo?
- Menciona algunos ejemplos de artículos u objetos que tengan forma de cilindro. ¿Cómo aplican los fabricantes de estos artículos el tema que estamos estudiando? Haz una hipótesis y coméntala en el grupo.

• Los conos

1. Analiza la siguiente figura y dibuja a la derecha las figuras planas que componen un cono con tapa.

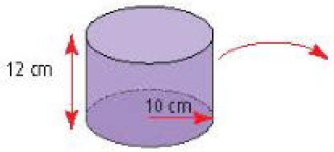


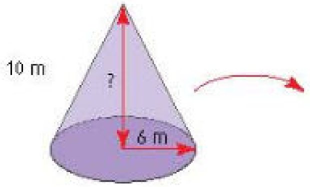
- ¿Qué figuras planas lo componen?
- ¿A qué dimensiones se transforman la generatriz, la altura y el radio en el desarrollo plano? Anótalas en los dibujos de arriba.
- ¿Cuál sería la fórmula para calcular el área de la tapa del cono?
- ¿Cómo calcularías la generatriz de un cono si se conocen la altura y el radio?
- En el desarrollo del plano del cono, ¿qué representa la generatriz?
- ¿Cuál es la diferencia entre la altura del cono y su generatriz?
- ¿Cuál sería la fórmula para calcular el área de la figura lateral del cono? Observa con atención que no se forma con precisión un triángulo sino un sector de círculo.

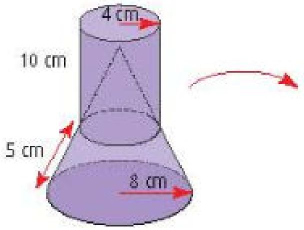
2. Menciona algunos objetos que tengan forma de cono.

Pongámonos de acuerdo

1. Reunidos en parejas analicen las siguientes figuras:







2. Ahora realicen lo siguiente:
   ⇒ Dibujen, junto a cada figura, su desarrollo en el plano.
   ⇒ Escriban las medidas de todos sus contornos.
   ⇒ Calculen las áreas superficiales.

La última figura está compuesta por un cilindro y un cono truncado. El desarrollo en el plano lo puedes hacer en dos partes: una para la parte de arriba (cilindro) y la otra para el cono truncado. Considera las tapas de arriba y abajo. Observa que el cono truncado es equivalente al cono entero menos una parte de arriba que también tiene forma de cono pero es más pequeño.

De vuelta al Explora

Para poder responder a la pregunta planteada en la sección EXPLORA acerca de cuánta tela tendría que comprar Areli para realizar su falda semicircular con las medidas dadas, es necesario que hagas el desarrollo de la falda en el plano. Antes de hacerlo, considera lo siguiente:

- ¿Qué significa cuando se dice falda "semicircular"? Coméntalo con el grupo.
- ¿Cuál es la medida del ángulo del sector circular que forma el cono truncado?

Para tu apunte

El desarrollo plano del cono está formado por dos figuras, un círculo y un sector circular. Las medidas del sector circular que forma la superficie lateral de un cono son las siguientes: el radio del sector (r_{sector}) es igual a la generatriz (g) del cono y la longitud del arco circular es igual a la circunferencia de la tapa ($2\pi r_{tapa}$), por lo que el ángulo del sector (θ_{sector}) puede calcularse con la siguiente proporción:

$$\frac{360°}{2\pi r_{sector}} = \frac{\theta_{sector}}{2\pi r_{tapa}}$$

$$\frac{360°}{2\pi \ast g} = \frac{\theta_{sector}}{2\pi r_{tapa}}$$

$$\theta_{sector} = \frac{360° \ast r_{tapa}}{g}$$

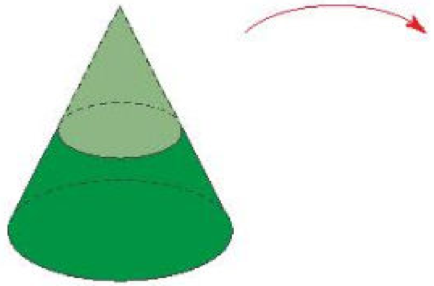
Ya conocido el ángulo del sector circular (θ_{sector}), entonces el área del sector también se calcula mediante otra proporción:

$$\frac{360°}{\pi(r_{sector})^2} = \frac{\theta_{sector}}{A_{sector}}$$

$$\frac{360°}{\pi(g)^2} = \frac{\theta_{sector}}{A_{sector}}$$

$$\therefore\ \text{Área}_{sector} = \frac{\pi \ast g^2 \ast \theta_{sector}}{360°}$$

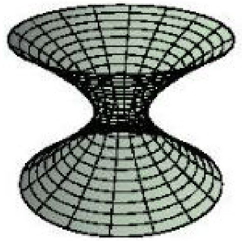
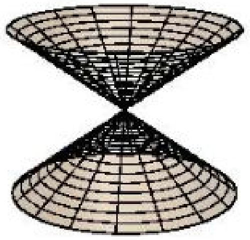
⇒ Dibuja el desarrollo en el plano de la falda semicircular. Recuerda que al coserse tiene forma de un cono truncado, lo que significa que se le quitará una parte de la superficie de arriba del cono para que ésta ajuste en la cintura de Areli.



- Del desarrollo en el plano, ¿cuál es la medida que debe coincidir con la cintura de Areli que es de 65 centímetros? Anótala en el dibujo.
- Para que esa parte coincida con los 65 centímetros de cintura de Areli, ¿qué medida, desde el centro del sector y sobre la generatriz, se tendrá que quitar?
- ¿Cuál es la medida que debe coincidir con el largo de la falda, es decir 1.20 metros? Anótala en el dibujo.
- ¿Cuál será la amplitud de la falda? Es decir, ¿cuánto mide el contorno de la parte inferior de la falda?
- ¿Cuál es el área de tela que se necesita para hacer la falda semicircular de Areli?
- ¿Cuánta tela le recomendarías a Areli que compre para realizar la falda? ¿Por qué?

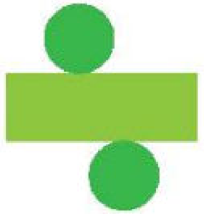
Practica

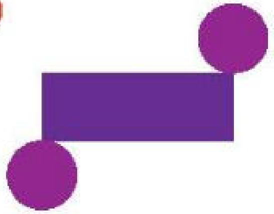
1. Usa nuevamente tijeras, palillos y papel para este ejercicio. Recorta una figura que al momento de girar forme sólidos de revolución parecidos a los siguientes:


2. ¿Cuál de los siguientes desarrollos planos no da como resultado un cilindro?

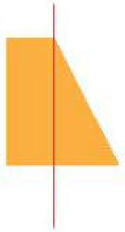
a

b

c

d


3. ¿Cuál de las siguientes figuras da por resultado un cono truncado al momento de girarlo sobre el eje marcado con rojo?

a

b

c

d


4. Busca objetos de forma cilíndrica como latas, vasos o envases. Toma sus medidas y traza su desarrollo en el plano.
5. Busca objetos de forma cónica como vasos de papel o conos para helado; puedes incluso considerar una pantalla de lámpara (recuerda: dos conos restados). Toma sus medidas y traza su desarrollo en el plano. Si es demasiado grande para trazarlo en papel utiliza un factor de escala para reducirlo. Recuerda que el factor de escala es la constante por la que multiplicas todas las medidas para aumentar o reducir la escala de un plano; si quieres aumentarlo de tamaño debe ser mayor que 1, si quieres disminuirlo debe ser menor que 1 pero mayor que 0.

6. ¿Conoces las figuras de papel picado tridimensionales? Seguramente las has visto colgadas adornando casas, escuelas, o diversos lugares en festividades patrias, navideñas u otras. En México, el papel picado (plano o tridimensional) se ha empleado desde hace mucho tiempo. Hoy en día, es una manifestación artesanal mexicana, tanto, que en 1998 se declaró Patrimonio Cultural del Estado de Puebla, ya que en el municipio de San Salvador Huixcolotla se elabora este trabajo. Estas figuras son ejemplos de sólidos de revolución.

⇒ Visita esta página y conócelas:

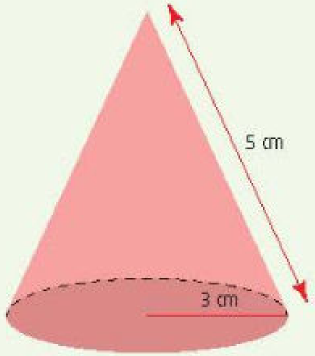
www.mexicodesconocido.com.mx/papel-picado-patrimonio-cultural-puebla.html

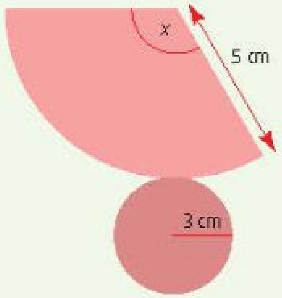
www.papelpicadocir.com/Papel_picado_pruductos_Fiestas_patrias.html

⇒ Traza en un papel las figuras planas a partir de las cuales se generan algunas de las figuras de papel picado.

Evalúa tu avance

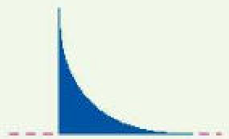
1. Si un cono tiene las dimensiones según el dibujo, ¿cuánto vale el ángulo x en el desarrollo plano?



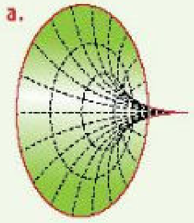


a. 600°
b. 216°
c. 180°
d. 312°

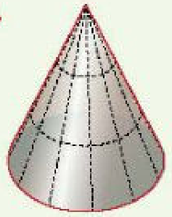
2. ¿Cuál es el sólido resultante de girar la superficie azul sobre el eje rojo?



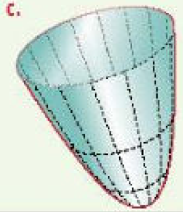
a.



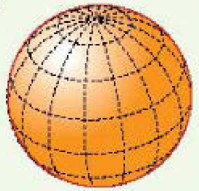
b.



c.



d.



Medida

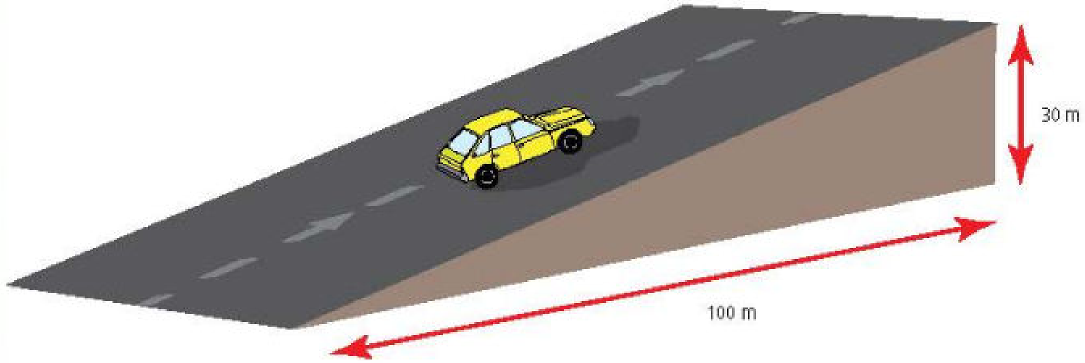
Lección 23

Analizarás las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto entre el cateto adyacente

Explora

La pendiente

Algunos vehículos todo terreno pueden avanzar en pendientes muy empinadas. En el siguiente dibujo se ejemplifica un vehículo todo terreno que avanza 100 metros y sube 30.



- ¿Cuál es el ángulo de inclinación de la cuesta a subir?

Descubre y construye

• La pendiente y la razón

1. Grafica las siguientes funciones en un mismo eje de coordenadas y mide con tu transportador el ángulo de inclinación que tiene la recta que trazaste con el eje x.

   a. $y = x + 1$

   b. $y = \frac{3}{2}x + 1$

   c. $y = \frac{1}{2}x + 1$

2. Calcula la pendiente para cada una de las rectas y responde las siguientes preguntas:
   - ¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero? Argumenta por qué.
     - ⇒ Entre mayor valor de la pendiente, mayor valor del ángulo.
     - ⇒ Entre mayor valor de la pendiente, menor valor del ángulo.
     - ⇒ Entre menor valor de la pendiente, mayor valor del ángulo.
     - ⇒ Entre menor valor de la pendiente, menor valor del ángulo.
   - ¿Qué relación tiene la pendiente con el valor del ángulo? Escribe una frase que describa la relación que existe entre el ángulo y la pendiente.

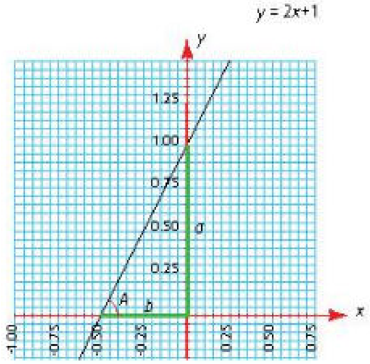
Para tu apunte

La **pendiente** es la inclinación de la recta con respecto al eje x. En la lección 16 usamos la pendiente, pero la expresamos como porcentaje. Echa un vistazo a esa lección y recuerda por qué era porcentaje y no fracción. La pendiente se calcula dividiendo el cambio en y entre el cambio en x, $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Esto es, se eligen dos puntos cualesquiera de la recta y se nombran (x_1, y_1) y (x_2, y_2), y se dividen de la siguiente forma:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

• La gráfica

1. Analiza la siguiente gráfica y observa el triángulo formado por la recta $y = 2x + 1$ y los segmentos a y b.



2. Una vez realizado lo anterior responde:
   - ¿Cuál es el valor del cociente $\frac{a}{b}$?

Para conocer la medida del ángulo A ($\angle A$), necesitas una tabla de funciones trigonométricas o una calculadora. Las tablas trigonométricas existen desde el siglo II

Para tu apunte

El término **tangente** ya lo habías usado cuando te referías a una recta que toca en un punto a una circunferencia. Ahora tendrá otro significado. La **tangente del ángulo** $\boldsymbol{A}$ se define como el cociente del cateto opuesto entre el cateto adyacente de un triángulo rectángulo y se expresa:

$$\tan(A) = \frac{a}{b}$$

antes de nuestra era y fueron creadas por los griegos. Consisten en las razones (divisiones) de los lados de un triángulo rectángulo asociadas al ángulo que las forma. Hace 30 años se consultaban en tablas, ahora tu calculadora las calcula.

Para conocer el ángulo A ($\angle A$) por medio de la calculadora y dado que conoces el valor de la tangente de A que es $\frac{a}{b}$, oprime los siguientes botones:

seguido por


y después $\left(\frac{a}{b}\right)$ y el signo =

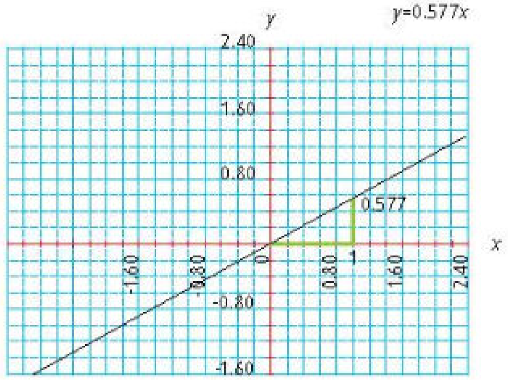
Donde $\frac{a}{b}$ es el cociente del cateto opuesto (a) entre el cateto adyacente (b). Puedes capturarlo en tu calculadora como decimal o como fracción. A esta operación matemática se le llama arco tangente o tangente inversa (arctan o $\tan^{-1}$) de $\frac{a}{b}$ y se escribe:

$$\angle A = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$$

- ¿Cuánto vale el ángulo A en este caso?

Pongámonos de acuerdo

1. Reunidos en parejas uno de ustedes dibuje en un plano cartesiano cuatro rectas que pasen por el origen y tengan los siguientes ángulos de inclinación: 30°, 45°, 60° y 75°.
2. Con los conocimientos que ya tienen, obtengan la pendiente en cada caso. Establezcan un punto para cada una de ellas en donde con toda claridad puedan establecer el valor de las coordenadas (x, y) y usen el origen para sustituir cada valor en la fórmula de m.
3. Ahora en cada caso dibujen un triángulo rectángulo con la hipotenusa, que es la recta que dibujaron. Observen el siguiente ejemplo.



⇒ Completen la siguiente tabla:

Ángulo	Pendiente como razón	Medida del cateto opuesto	Medida del cateto adyacente	Cociente del cateto opuesto y el cateto adyacente	Tangente del ángulo
30°	$\frac{0.577}{1} = 0.577$	0.577	1	0.577	Tan (30°) = 0.5777
45°					
60°					
75°					

De vuelta al Explora

Para resolver el problema planteado al inicio de la lección piensa lo siguiente: la inclinación de la cuesta es la pendiente de una recta.

1. Ahora responde:
   - ¿Qué relación hay entre la pendiente de una recta y su ángulo de inclinación?
   - ¿Qué necesitas saber para obtener la pendiente de una recta?
   - ¿Cómo podrías obtener el ángulo de inclinación conociendo la pendiente de la recta?
2. Observa que la inclinación de la cuesta puede verse como un triángulo rectángulo. Si tomamos el ángulo de inclinación como base podemos decir que el cateto opuesto mide: _________ y el cateto adyacente mide: _________.
   Por lo tanto:
   ⇒ ¿Cuál es el valor de la tangente de *A*? _______________
   ⇒ ¿Cuánto mide el ángulo *A*? _______________
3. Organicen una breve discusión en grupo y redacten la relación entre la pendiente de una recta, el ángulo de inclinación y la razón entre el cateto opuesto y el adyacente.

Para tu apunte

La pendiente de una recta y la tangente del ángulo son equivalentes, ya que la tangente se define como el cociente del cateto opuesto y el cateto adyacente de un triángulo rectángulo y el ángulo que relaciona ambos catetos es siempre constante, por eso se encuentra en una tabla de valores constantes que puedes consultar ya sea para obtener el cociente si conoces el ángulo o para encontrar el ángulo si conoces el cociente.

Practica

1. Traza la siguiente recta: $y = 2x + 1$

En la misma recta dibuja cuatro triángulos rectángulos cuya hipotenusa sea la recta que trazaste y el vértice esté en la intersección de la recta con el eje *y*, es decir en el punto (0, 1).

⇒ Calcula el ángulo que está en el vértice (0, 1) de cada triángulo.
⇒ Calcula las dimensiones de cada triángulo.
⇒ Calcula la razón entre el cateto opuesto y el adyacente de cada triángulo (considerando al vértice (0, 1) como ángulo de referencia).
⇒ Calcula la hipotenusa en cada caso (si no te acuerdas de la fórmula del Teorema de Pitágoras, consúltala en la lección 12).
⇒ De cada razón en el triángulo calcula su arco tangente (o tangente inversa, $\tan^{-1}$ en la calculadora).

- ¿Cuáles resultados se mantuvieron constantes y cuáles se modificaron?
- ¿Por qué crees que se mantiene el ángulo en todos los triángulos si los lados cambiaron de tamaño?

2. Calcula el ángulo de inclinación de la recta $y = 3x$.
3. Da por lo menos cinco medidas del cateto opuesto y el cateto adyacente de un triángulo rectángulo cuyo ángulo de inclinación sea de 45°. Completa la siguiente tabla:

Cateto opuesto	Cateto adyacente	Cociente de los catetos (opuesto entre adyacente)	Ángulo cuya tangente es el cociente de los catetos

4. Escribe la ecuación de la recta que pasa por el origen y tiene un ángulo de inclinación de 15°.
5. Investiga qué es un sextante y un astrolabio. Discute junto con tus compañeros cómo se relaciona el conocimiento adquirido en esta lección con estos dos artefactos.

Evalúa tu avance

1. Si la pendiente de una recta es $m = \frac{7}{10}$ y cruza por el origen, ¿cuánto vale su ángulo de inclinación?
   a. 15°
   b. 45°
   c. 80°
   d. 35°
2. Una escalera que mide 3.5 m de altura está recargada en una pared. La base de la escalera está a 1 m de distancia de la pared. ¿Cuál es el ángulo de inclinación de la escalera?
   a. 33°
   b. 12°
   c. 73.4° aprox.
   d. 88°

Medida

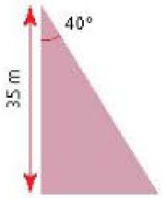
Lección 24 Analizarás las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo

Explora

Operación rescate

Unos rescatistas deben ayudar a salir a unos excursionistas que han quedado atrapados en el fondo de un barranco de 35 m de profundidad. Cuentan con una cuerda y saben que para poder colgar una canastilla con seguridad, deben tener un ángulo con la vertical de 40º.

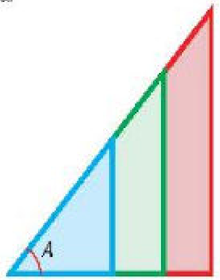
- ¿Qué largo debe tener la cuerda para llegar en canastilla hasta los excursionistas?



Descubre y construye

• Los triángulos rectángulos y sus constantes

1. Utiliza tu regla y un transportador para medir en el dibujo los datos que se indican en la tabla y complétala.

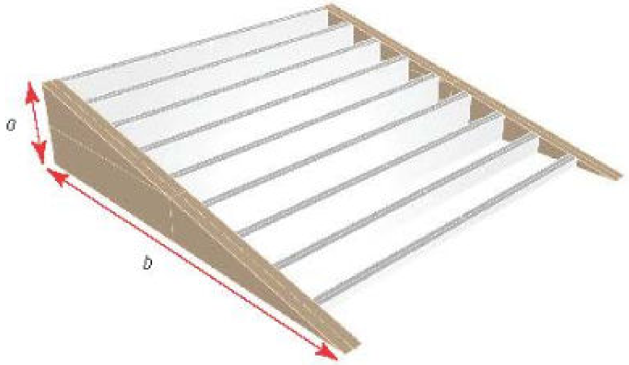


	Ángulo A	Cateto opuesto (CO)	Cateto adyacente (CA)	Hipotenusa (Hip)	$\frac{CO}{Hip}$	$\frac{CA}{Hip}$	$\frac{CO}{CA}$
Triángulo azul							
Triángulo verde							
Triángulo rojo							

2. Ahora responde:
   - ¿Varía el ángulo para cada triángulo?
   - ¿Qué cociente(s) se mantiene(n) equivalente(s)?
   - ¿Por qué crees que siempre los cocientes resultan equivalentes?
   - ¿Pasará lo mismo si ahora usamos el ángulo superior de cada triángulo?

• Las diferentes rampas de patineta

Para construir una rampa para patineta se hace una base de madera con un tablón de madera, con medidas que forman un ángulo recto, que llamaremos a y b.



En la colonia de Martín, quieren construir una rampa de patineta e hicieron la siguiente tabla para poder elegir cuál es la mejor.

	a	b	$\frac{a}{b}$	Ángulo de inclinación
Rampa 1	6	8	0.75	36.86°
Rampa 2	5			45°
Rampa 3		5		50.19°
Rampa 4			2.2	65.55°
Rampa 5	4			33.69°

Si la rampa oficial para andar en patineta tiene un ángulo de inclinación de 26º exactamente y el largo mide 6 m:

- ¿Cuánto tienen que medir a y b para que la rampa tenga esa inclinación?

Para tu apunte

La ubicación del cateto opuesto y el cateto adyacente depende del ángulo que tomes de referencia. Observa los siguientes dos triángulos:

Los catetos opuestos y adyacentes cambian cuando tomas como referencia el otro ángulo agudo del triángulo rectángulo, pero la hipotenusa siempre es la misma para cualquiera de estos ángulos. Incluso es conveniente tener un código para nombrarlos: si el ángulo es B, su cateto opuesto se denomina b minúscula y si el ángulo es A, su cateto opuesto se nombra como a minúscula.

Para tu apunte

Para obtener la tangente (a/b) cuyo ángulo conocido es A se necesita presionar en la calculadora tan A.

Para tu apunte

Las funciones trigonométricas se definen como los cocientes de dos de los lados de un triángulo rectángulo.

Funciones trigonométricas
Las principales funciones trigonométricas son:

$$\text{Sen } A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{Cos } A = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{Tan } A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

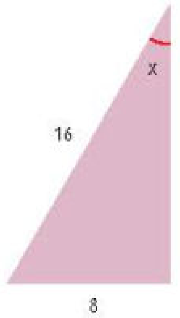
Para tu apunte

Para resolver un triángulo rectángulo del que conoces dos de sus lados:

1. Es recomendable que hagas un esquema del triángulo.
2. Una vez que tengas el esquema ubica los lados conocidos.
3. Utiliza el Teorema de Pitágoras para encontrar el lado que falta.
4. Decide: ¿cuál ángulo quieres encontrar primero?
5. Encuentra la función trigonométrica que relaciona los lados que sí conoces con el ángulo que quieres conocer.
6. En esa función sustituye los lados conocidos y haz la división.
7. Con tu calculadora, encuentra el ángulo que corresponda a la función que tú elegiste.
8. Encuentra el ángulo faltante. Recuerda que puedes encontrarlo con la propiedad de la suma de ángulos interiores de un triángulo que da 180°.

• Resolución de los triángulos rectángulos

1. Analiza el siguiente triángulo y calcula el ángulo x.



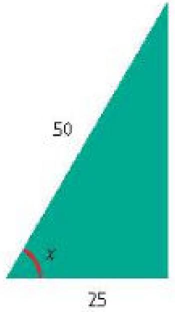
Para ello necesitarás calcular el cociente del cateto opuesto entre la hipotenusa. Este cociente tiene un nombre especial y se denomina **seno** del ángulo; es muy importante que verifiques de cuál ángulo lo vas a calcular puesto que el cateto opuesto varía si cambias de ángulo. Para calcular el ángulo x utiliza la función arco seno (o seno inverso), en la calculadora sen^{-1}, igual que como lo hiciste con la tangente inversa ($\tan_{-1}$).

Entonces:

$$x = \text{sen}^{-1}\,\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

- ¿Cuál es el valor del ángulo x?

2. Analiza el siguiente triángulo y calcula el ángulo x.



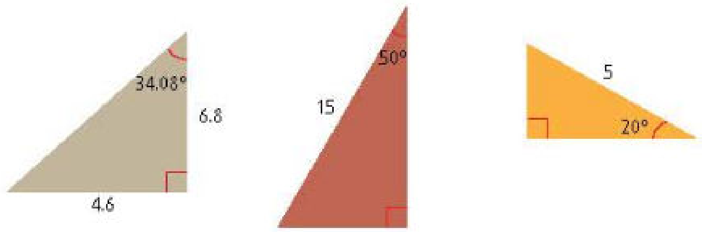
Para ello necesitarás calcular el cociente del cateto adyacente entre la hipotenusa. Este cociente también tiene un nombre especial: se denomina **coseno** del ángulo. Para calcular el ángulo x utiliza la función arco coseno (o coseno inverso), en la calculadora $\cos^{-1}$.

- ¿Cuánto vale el ángulo?

3. Si tomas en cuenta los cocientes: cateto opuesto entre hipotenusa, cateto adyacente entre hipotenusa y, cateto opuesto entre cateto adyacente:
- ¿Cuáles de los cocientes es siempre menor que uno? ¿Por qué?
- ¿Cuál de la razones puede ser mayor que uno? ¿Por qué?

Pongámonos de acuerdo

1. Reunidos en parejas resuelvan los siguientes triángulos rectángulos (es decir, obtengan todos sus ángulos y sus lados).



2. Identifiquen cada uno de los catetos dependiendo del ángulo de referencia.
- En todos los triángulos, ¿cuál es el lado más largo?

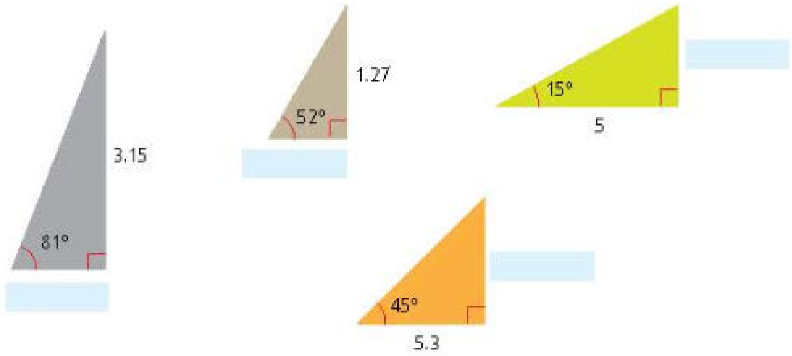
3. Obtengan los cocientes: co/hip, ca/hip y co/ca.
- ¿Cuáles de estos cocientes siempre son menores que uno?
- ¿Cuáles de estos cocientes son mayores que uno?

De vuelta al Explora

Con lo que ahora sabes, calcula la medida de la hipotenusa. Reflexiona acerca de cuál razón trigonométrica te funcionaría para obtener la distancia que precisas.

Practica

1. Completa las medidas de los triángulos rectángulos sólo con la información que se te da:

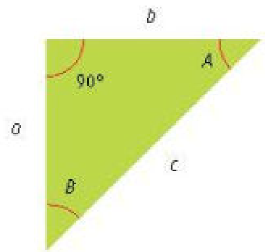


Para tu apunte

Para resolver un triángulo rectángulo si conoces un ángulo y un lado:

1. Es recomendable que hagas un esquema del triángulo.
2. Ubica en el dibujo los datos que tienes, tú puedes decidir dónde está el ángulo que te dan y en función de él ubicar el lado dado.
3. Decide: ¿cuál lado quieres encontrar primero?
4. Encuentra cuál función trigonométrica relaciona el lado que sí conoces con el que quieres saber.
5. En esa función sustituye los datos que sí conoces: el ángulo y el lado del triángulo rectángulo conocido.
6. Con tu calculadora, encuentra la función del ángulo, sustitúyela en la fórmula de la función.
7. Despeja el lado desconocido y resuelve la operación.
8. Con el Teorema de Pitágoras encuentra el lado faltante.

2. Responde verdadero o falso en las siguientes afirmaciones. Argumenta tu respuesta o demuéstrala con un ejemplo. Toma en cuenta el siguiente triángulo:



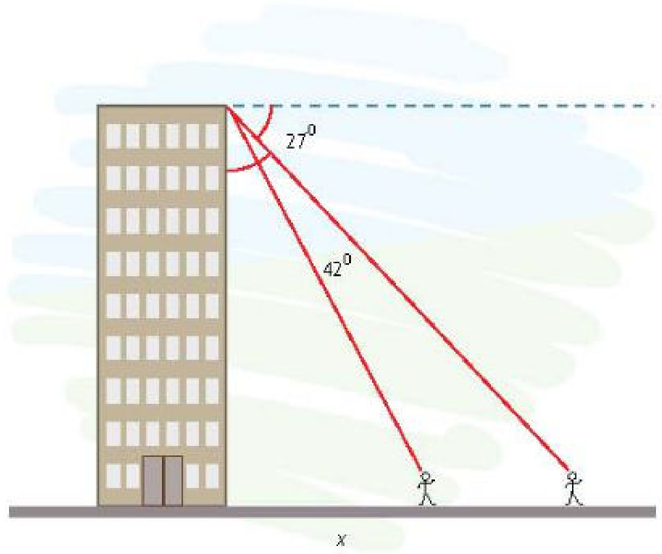
a. Dos triángulos con los lados a y b iguales tienen el mismo ángulo A. ( )
b. Dos triángulos tienen medidas diferentes de a y b y aunque a/b es igual en ambos triángulos, tienen el mismo ángulo A. ( )
c. Dos triángulos tienen medidas diferentes de a y b y aunque b/a es igual en ambos triángulos, tienen el mismo ángulo B. ( )
d. Dos triángulos con el mismo ángulo A siempre tendrán la razón entre a/b igual. ( )
e. Dos triángulos con el mismo ángulo B siempre tendrán igual la razón entre b/a. ( )

3. Dado que el cociente cateto opuesto/cateto adyacente en un triángulo rectángulo es: 15/20, ¿cuál sería el cociente del cateto opuesto/hipotenusa?, ¿cuál sería el cociente cateto adyacente/hipotenusa?

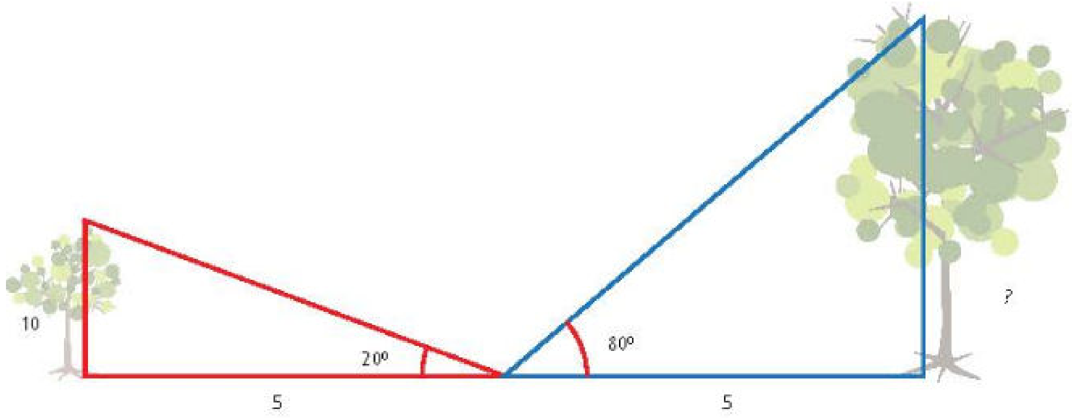
4. Desde lo alto de un edificio de 300 metros de altura se observan dos personas. ¿Cuál es la distancia entre ellas dos si sus ángulos de depresión medidos desde la punta del edificio son 42° y 27°, respectivamente?

Para tu apunte

Un **ángulo de elevación** es el que se mide desde la horizontal hacia arriba y un **ángulo de depresión** es el que se mide desde la horizontal hacia abajo.

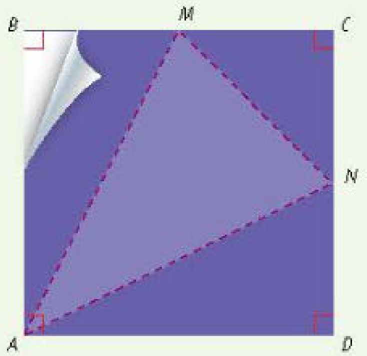


5. Estás situado en medio de dos árboles a una distancia de 5 metros de cada uno. Los ángulos de elevación son 20° y 80°, y la altura del árbol más pequeño es de 10 metros.
   - ¿Cuánto mide la altura del árbol grande?



Evalúa tu avance

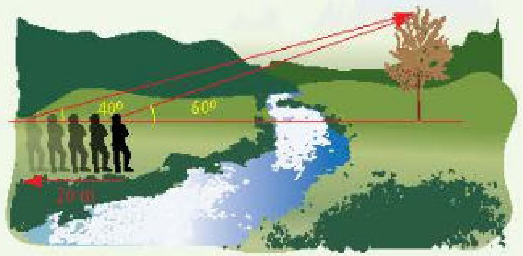
1. Sea $ABCD$ un cuadrado de lado 12, el cual se dobla por las líneas punteadas. M y N son los puntos medios de los lados correspondientes.



- ¿Cuánto mide el ángulo $\angle MAN$?

a. 26.56°
b. 45°
c. 33.23°
d. 36.86°

2. En tierra, a la orilla de un río, Francisco ve un árbol situado a la otra orilla con un ángulo de 60°. Al alejarse 20 metros hacia atrás, lo ve con un ángulo de 40°. ¿Cuál es la altura del árbol?



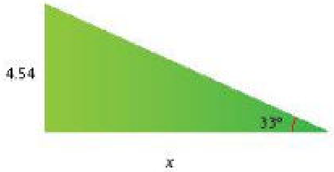
a. 18.7 m.
b. 10.4 m.
c. 32.7 m.
d. 27.4 m.

Medida

Lección 25 Explicitarás el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente

Para tu apunte

Una manera de resolver triángulos rectángulos es usando las razones trigonométricas y despejando el lado que se quiere obtener. Por ejemplo, en el siguiente triángulo se quiere obtener el cateto adyacente y se tiene el cateto opuesto y un ángulo.



Para resolverlo, podemos usar la tangente de 33°, ya que es la función que relaciona el dato conocido con el dato que quieres obtener, y despejar el cateto adyacente:

$$\tan 33° = \frac{4.54}{x}$$

$$x = \frac{4.54}{\tan 33°}$$

$$x = \frac{4.54}{0.64}$$

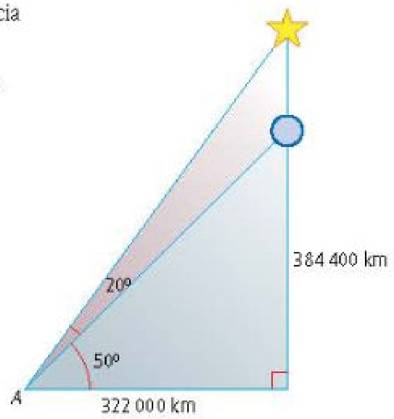
$$x = 7.09$$

Por lo tanto $x = 7.09$

Explora

Un cálculo acertado

Un astrónomo quiere estimar la distancia que hay de la Luna a una estrella, para lo cual hizo el siguiente esquema.



- ¿Cuál es la distancia que hay de la Luna a la estrella?

Descubre y construye

- **La altura del árbol**

Un árbol proyecta una sombra de 15 metros en el momento en el que el Sol se observa con un ángulo de elevación de 40°.

- ¿Cuál es la altura del árbol?

- **La altura de un edificio**

Un edificio proyecta una sombra de 50 metros de largo cuando el ángulo del Sol sobre el horizonte es de 70°.

- ¿Qué altura tiene aproximadamente el edificio?

- **El ascenso del avión**

Un avión despega y asciende a una razón uniforme de 20° hasta alcanzar una altura de 1800 metros.

- ¿Qué distancia recorrió?

Para tu apunte

Las razones trigonométricas son:

- sen θ = cateto opuesto/hipotenusa.
- cos θ = cateto adyacente/hipotenusa.
- tan θ = cateto opuesto/cateto adyacente.

Pongámonos de acuerdo

1. Organizados en equipos investiguen cómo el círculo unitario ayuda a entender los valores del seno, coseno y tangente de ángulos entre 0° y 360°.
2. Después, entren a la página http://www.geogebra.org/en/upload/files/Ferito/Circulo_Unitario.html y respondan las siguientes preguntas:
   - ¿Qué ángulos hacen que el valor del coseno y el seno sean iguales?
   - ¿Cuáles ángulos hacen que el seno valga lo mismo?
   - ¿Cuánto vale la tangente de 90°?, ¿por qué?
   - ¿En qué ángulo el seno es igual a 1?
   - ¿En qué ángulo el coseno es igual a 1?
   - ¿A cuánto equivale $\text{sen}^2(x) + \cos^2(x)$ para todo ángulo?

Para tu apunte

Recuerda los pasos:

1. Traza un esquema que te ayude a visualizar el problema.
2. Identifica en el esquema los datos que te dan.
3. Encuentra cuál función relaciona los datos que conoces con el dato que se te pide.
4. Sustituye los datos:
   a. Para poder calcular un lado se despeja.
   b. Para poder calcular un ángulo se necesita usar arco seno, arco coseno y arco tangente (seno inverso, coseno inverso o tangente inversa).

De vuelta al Explora

Si utilizas la tangente puedes obtener una ecuación en donde el cateto opuesto sea la distancia a la Luna más la distancia que hay de la Luna a la estrella.

¿Por qué este tipo de diagramas es útil?

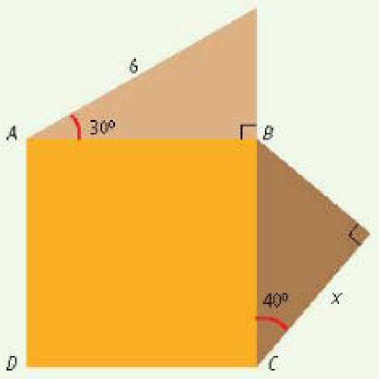
1. Localiza cerca de tu escuela un edificio con una antena o una montaña con un árbol.
2. Haz el diagrama correspondiente inventando los valores de la altura del edificio y la distancia hasta él (o de la montaña y el árbol) y obteniendo la altura de la antena (o del árbol).

Practica

1. Un poste está sujeto al suelo por medio de unos tirantes. Si uno de estos tirantes mide 50 metros de largo y forma un ángulo de 55° con la horizontal.
   - ¿A qué altura sobre el poste está la unión con el cable?
2. Una escalera se encuentra apoyada en una pared separada 5 metros de su base; si el ángulo que forma la escalera con el suelo es de 70°.
   - ¿Cuál es la longitud de la escalera?
3. Un automóvil sube por una calle cuya inclinación es de 25° hasta llegar a una casa que se encuentra a una altura de 200 metros, medida desde el punto donde el vehículo empieza a subir.
   - ¿Cuál es la distancia que recorre el automóvil?
4. Una persona arrojó una pelota y le pegó a otra en la nariz. Al rebotar la pelota en el suelo salió disparada dos metros formando un ángulo de 55°.
   - ¿A qué altura tiene la nariz la persona golpeada?
5. Una tirolesa sale de un árbol a 15 metros de altura. El cable mide 40 metros.
   - ¿Qué ángulo forma el cable con el suelo?

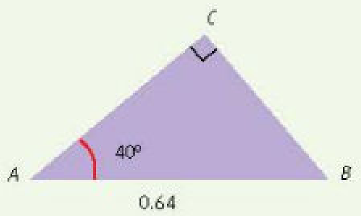
Evalúa tu avance

1. Si $ABCD$ es un cuadrado, determina x.



a. 1.92
b. 3.98
c. 2.29
d. 3.34

2. ¿Cuánto mide $\overline{BC}$?



a. 0.64
b. 1.28
c. 0.41
d. 1

Proporcionalidad y funciones

Lección 26

Calcularás y analizarás la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificarás la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa

Explora

¡A nadar!

Una alberca se está llenando de agua de manera que, por cada 1500 litros su nivel sube 10 centímetros.

- ¿Cuál es el incremento en la altura del agua en la alberca al pasar de un volumen de 4500 a 9300 litros?

Una alberca olímpica se llena con 2500000 litros de agua.

Descubre y construye

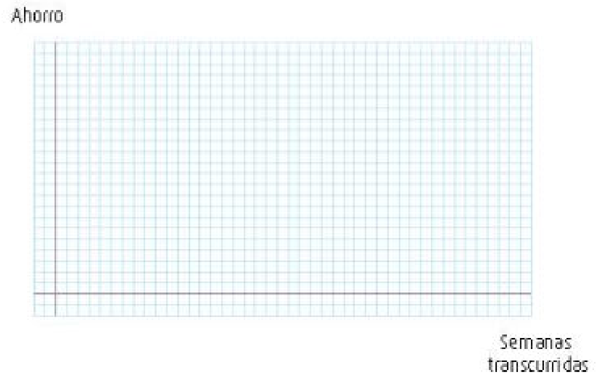
- **Plan de ahorro**

Nancy planea comprarse una bicicleta para el siguiente verano y ha decidido comenzar a ahorrar 40 pesos por semana.

1. Ayúdala a completar la siguiente tabla:

Semana de ahorro	Ahorro (pesos)
1	
2	
3	
4	
5	
6	
10	
20	
30	
50	

2. Con la información de la tabla responde:
   - ¿Cuál es el ahorro de Nancy a la semana dos?
   - ¿Cuánto aumentó el ahorro de Nancy de la semana uno a la semana dos?
   - ¿Cuál es el ahorro a la semana cinco?
   - ¿Cuál es el ahorro a la semana diez?
   - ¿Cuánto aumentó su ahorro de la semana dos a la semana cinco?
   - ¿Cuántas semanas pasaron para que el ahorro aumentara de 120 a 240 pesos?
3. Con los datos de la tabla, traza la gráfica del ahorro de Nancy con respecto a las semanas transcurridas:

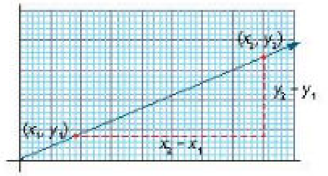


   - ¿Cuál es el ahorro a la semana 28?

Para tu apunte

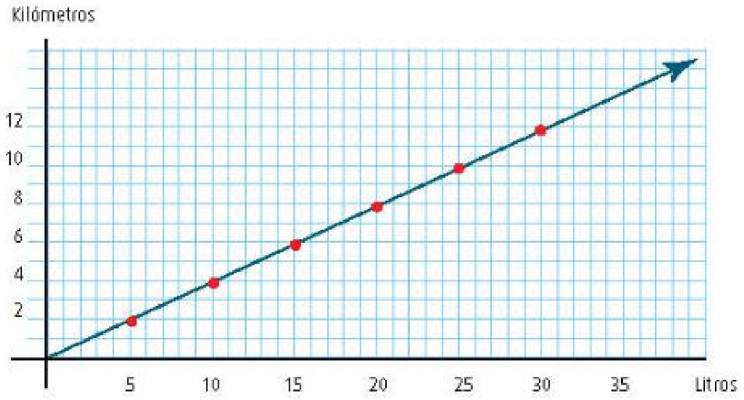
Se llama **razón de cambio** a la tasa de variación de una magnitud con respecto a otra. Esto es, en una función de dos magnitudes x y y, cuánto cambia la magnitud y por unidad de variación de la magnitud x:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



• El rendimiento de un automóvil

La siguiente gráfica muestra el rendimiento de un coche en kilómetros recorridos con respecto a los litros de gasolina consumidos:



1. De acuerdo con la información que muestra la gráfica, responde:
   - ¿Cuál es el rendimiento del coche al consumirse cinco litros de gasolina?
   - ¿Cuál es el rendimiento del coche al consumirse diez litros de gasolina?

   - Al consumirse del quinto al décimo litro de gasolina, ¿cuál fue el incremento del rendimiento?
   - ¿Cuál fue el incremento del rendimiento al consumirse del décimo al vigesimoquinto litro de gasolina?
2. Calcula la razón de cambio del rendimiento del coche con respecto a los litros consumidos.
3. De la gráfica anterior, toma dos puntos cualesquiera y calcula la pendiente de la recta.
   - ¿Qué relación tiene la pendiente de la recta y la razón de cambio? Coméntalo con tus compañeros y tu maestro.

Para tu apunte

Cuando la razón de cambio en una situación es constante se tiene una función lineal. Las funciones lineales se representan gráficamente con una recta.

• Las manzanas

En la tienda de doña Perla se venden bolsas de manzanas. Todas las bolsas tienen la misma cantidad de manzanas. Si Araceli compra cuatro bolsas, se lleva 32 manzanas.

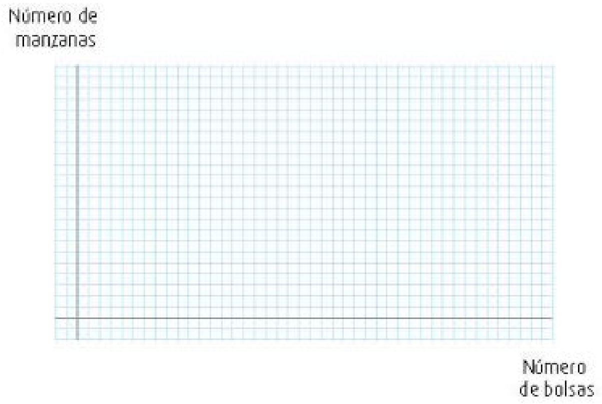
1. Con la información anterior completa la siguiente tabla:

Cantidad de bolsas	Cantidad de manzanas
$\frac{1}{4}$	
$\frac{1}{2}$	
1	
2	
3	
4	
5	
10	
15	
20	

2. Ahora responde:
   - ¿Cómo obtienes las cantidades de manzanas para una, dos o tres bolsas de manzanas?, ¿y para ½ y ¼ de bolsa?
   - ¿Cómo obtienes las cantidades de manzanas para cinco o más bolsas de manzanas?
   - ¿Cuántas manzanas hay en diez bolsas?
   - ¿Cuántas bolsas más llevaría Araceli si decide llevar diez bolsas?
   - ¿Cuántas manzanas más tendría Araceli si decidiera comprar diez bolsas?
   - ¿Cuál es la razón de cambio de las manzanas con respecto al número de bolsas?

- ¿Cómo interpretas el valor de la razón de cambio?

3. Traza enseguida su gráfica:

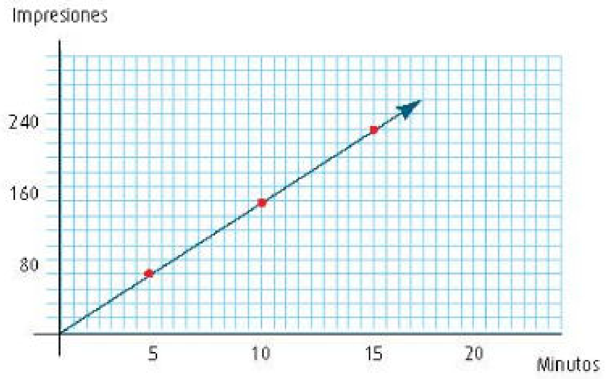


Para tu apunte

La razón de cambio de las situaciones modeladas con una función lineal coincide con la pendiente de la recta.

Pongámonos de acuerdo

Todas las madrugadas en la imprenta del diario *Cada mañana* se imprimen todos los ejemplares que se distribuyen en la ciudad. La siguiente gráfica muestra la cantidad de impresiones que realizan las máquinas al transcurrir el tiempo:



▲ Gráfica de impresión de diarios.

1. Junto con un compañero calculen la razón de cambio de las impresiones del diario con respecto al tiempo.
2. Ahora respondan:
   - ¿Cuántos diarios se imprimieron los primeros tres minutos?
   - ¿Cuántos diarios se imprimieron del minuto 30 al 60?
   - ¿Cuántos diarios se imprimieron del minuto 60 al 90?
3. Calculen la pendiente de la recta.

4. Completen la siguiente tabla:

Tiempo (minutos)	Impresiones del diario
60	
	80
15	
	20
1.5	
	2
	1

Para tu apunte

La razón de cambio juega el papel análogo de una velocidad, es decir, cuando se dice que la razón de cambio es a/b, esto significa que la magnitud dependiente aumenta a unidades, cuando la magnitud independiente aumenta b unidades. Esto quiere decir que la razón de cambio la puedes entender igual que se expresa una velocidad. Cuando se especifica la velocidad tú lees por ejemplo 45 km/h y significa que se avanza 45 km por cada hora que pasa. Cuando tienes una razón expresada como a/b significa que cuando la variable dependiente (que es la que depende de los valores que se den a la independiente) crece a unidades, la independiente crece b unidades.

De vuelta al Explora

Para conocer el incremento de altura que ocurre al pasar de un volumen a otro (de 4500 a 9300 litros), primero tienes que saber la altura a la que se encuentra con esos volúmenes.

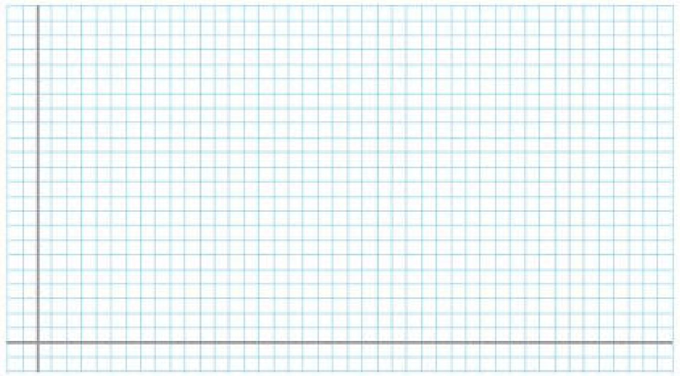
1. Para ello realiza una tabla usando la información que conoces:

Volumen del agua (litros)	Altura del agua en la alberca (centímetros)
	10
3 000	
6 000	
9 000	
15 000	
	200
750	
	1
300	
9 300	

2. Ahora responde
   - ¿Cuál es la altura del agua en la alberca cuando se tiene un volumen de 4500 litros?
   - ¿Cuál es la altura del agua en la alberca cuando se tiene un volumen de 9300 litros?
   - ¿Qué altura del agua en la alberca se incrementa al pasar de un volumen de 4500 a 9300 litros?

- ¿Cuál es la razón de cambio de la altura del agua en la alberca con respecto al volumen de agua suministrada?
- ¿Esta razón se mantiene para cualquier cambio del volumen? ¿Por qué?

3. Traza la gráfica de la altura del agua en la alberca con respecto al volumen administrado y calcula su pendiente. Recuerda indicar las unidades en cada uno de los ejes.

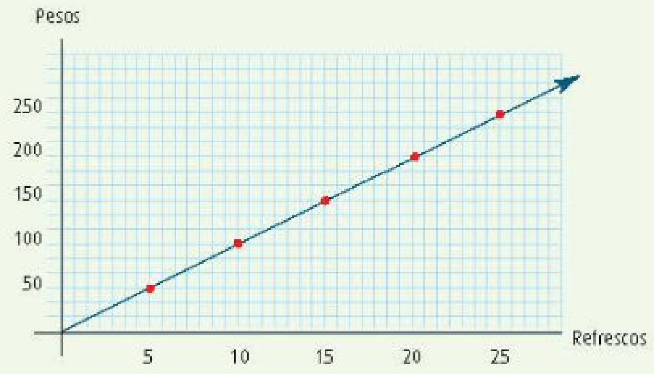


Practica

1. La maestra Fátima revisa las tareas de sus alumnos y apila las libretas una sobre otra formando una torre. Si por cada dos libretas apiladas la torre aumenta 2.5 centímetros:
   - ¿Qué tanto aumentará si la torre tiene 12 libretas y se le agregan otras cuatro?
2. Realiza la gráfica de un tanque de agua que se llena con una razón de cambio de cinco litros por minuto.
   - ¿En cuánto tiempo se llenaría si el tanque tiene una capacidad de 150 litros?
   - Después calcula la pendiente de la gráfica y compárala con la razón de cambio.
3. ¿Cómo interpretas que la razón de cambio de la temperatura, en grados Celsius, de un cuerpo con respecto al tiempo, en minutos, es de 2/3?
   - Si la temperatura del cuerpo es de 7 °C en cierto momento, ¿cuál será la temperatura al pasar tres minutos?
   - Si la temperatura del cuerpo es de 7 °C en cierto momento, ¿cuál era la temperatura tres minutos antes?
4. Investiga otras situaciones en donde la razón de cambio sea constante. Escríbelas y realiza una tabla de valores y su gráfica.

Evalúa tu avance

1. De acuerdo con la siguiente gráfica, ¿cuál de las opciones es falsa?



a. El costo por 15 refrescos es de 150 pesos.
b. La razón de cambio de la gráfica es 10 pesos por refresco.
c. El aumento de costo de 15 a 20 refrescos es de 50 pesos.
d. El aumento de costo de 5 a 25 refrescos es de 250 pesos.

2. La razón de cambio de la siguiente tabla es:

Tiempo (minutos)	Distancia (metros)
3	150
6	300
9	450
12	600
15	750
30	1 500
60	3 000
120	6 000

a. 60 metros/minutos.
b. 50 metros/minutos.
c. 15 metros/minutos.
d. 30 metros/minutos.

Análisis y representación de datos

Lección 27

Medirás la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Analizarás las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión

Explora

El mejor estudiante

Los estudiantes del grupo 3° G recibieron sus calificaciones de cuarto bimestre. Su profesor de planta busca quién fue el mejor estudiante para entregarle un reconocimiento el día de la asamblea. Las mejores calificaciones fueron las de Paula, Roberto, Alejandra y Javier:

	Paula	Roberto	Javier	Alejandra
Español	10	10	9	9
Matemáticas	8	5	7	10
Ciencias	6	8	7	8
Civismo	10	10	10	8
Historia	9	10	10	10
Inglés	9	9	8	8
Artes	10	10	10	9
Ed. Física	10	10	10	10

Si sólo puede reconocerse a uno de los cuatro como el mejor, ¿a cuál de ellos le darías el reconocimiento? Justifica tu respuesta.

Descubre y construye

• Más o menos dispersos

1. Ordena los datos de la siguiente lista de menor a mayor:

2 3 4 4 3 1 4 3

__ __ __ __ __ __ __ __

2. Ahora responde:
- ¿Cuál es el dato menor?
- ¿Cuál es el dato mayor?
- ¿Cuál es el intervalo de valores en el que se encuentran los datos de la lista?

3. Calcula el promedio (también se le llama media) de los datos de la lista.
- ¿Qué significado tiene el promedio calculado con respecto a los datos de la lista?
- ¿Qué tan alejados están los datos de la lista con respecto al promedio?

4. Calcula la diferencia positiva de cada dato de la lista y el promedio calculado. Anota en seguida esas diferencias:

__ __ __ __ __ __ __ __

5. Calcula el promedio de las diferencias obtenidas.

6. Haz en seguida los mismos cálculos para esta segunda lista:

3 2 1 5 5 1 2 5

__ __ __ __ __ __ __ __

- ¿Cuál es el intervalo de valores en el que se encuentran los datos de la segunda lista?
- El promedio de la segunda lista de datos es ________
- ¿Cuáles son las diferencias positivas de cada dato de la segunda lista?, ¿y el promedio?
- ¿Cuál es el promedio de las diferencias?

7. Compara la primera y segunda lista de datos y responde:
- ¿Qué semejanzas y diferencias encuentras con respecto a los cálculos realizados?

• El goleador del torneo

En la liga de futbol soccer Champions se premiará al jugador con más anotaciones en el torneo. De los ocho partidos jugados, Eduardo y Carlos fueron los que tuvieron mejor goleo. Ambos anotaron 15 goles para sus respectivos equipos que se ven reflejados en la siguiente tabla:

Para tu apunte

Al promedio de un conjunto de datos también se le conoce como **media aritmética** o simplemente media. Usualmente se representa con la letra $\bar{x}$.

El **rango** de un conjunto de datos está definido por la diferencia que hay entre el dato menor y el dato mayor.

$$\text{rango} = x_{mayor} - x_{menor}$$

En otras palabras, el rango representa la cantidad de valores en los que se encuentran restringidos o dispersados todos los datos del conjunto.

La **desviación media** de un conjunto de n datos se define como la media de las diferencias positivas de cada dato x_i y el promedio $\bar{x}$.

$$DM = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \dots + |x_n - \bar{x}|}{n}$$

	Eduardo	Carlos
Fecha 1	2	0
Fecha 2	2	0
Fecha 3	1	5
Fecha 4	3	0
Fecha 5	2	4
Fecha 6	1	1
Fecha 7	1	0
Fecha 8	3	5

1. De acuerdo con la información de la tabla responde:
   - ¿Quién merece ser premiado?, ¿por qué?
   - ¿Cuál es promedio de goles por partido para cada uno de los jugadores?
   - ¿Qué otra medida tomarías en cuenta para tomar la decisión de la premiación?
   - ¿Cuál es el rango para cada listado de goles de los jugadores?
2. Calcula la desviación media para cada listado de goles de los jugadores.
   - ¿Estas medidas te ayudan a tomar la decisión sobre el mejor goleador? Coméntalo con tus compañeros y maestro.

Para tu apunte

La media o promedio es una medida central de los datos de un conjunto. Al calcularla se sobrentiende que si todos los datos fueran iguales, ese sería su valor. Por su parte, el rango y la desviación media son medidas de dispersión, lo que significa qué tanto están dispersos los datos con respecto al dato menor y mayor del conjunto o, con respecto a la media de los datos.

El rango y la desviación media son medidas que informan más detalles acerca de un conjunto de datos, sobre todo cuando se requiere comparar dos conjuntos y el promedio es el mismo.

• Cerca o lejos de la media

1. Para cada lista de datos calcula su media, su rango y su desviación media:

	Media	Rango	Desviación media
7, 8, 8, 8, 8, 8, 9			
7, 7, 7, 8, 9, 9, 9			
7, 7, 8, 8, 8, 9, 9			

2. Una vez realizado lo anterior responde:
   - ¿Qué similitudes tienen las tres listas?
   - ¿Cuál de las siguientes medidas calculadas (central o de dispersión) usarías para diferenciar las tres listas? ¿Por qué?
   - ¿En cuál lista la mayoría de los datos están más próximos a la media? ¿Cómo es la desviación media de esa lista con respecto a las otras dos?
   - ¿En qué lista se obtuvo una desviación media mayor? ¿Cómo son la mayoría de los datos con respecto a la media?
   - Después de analizar los datos anteriores, ¿qué podrías concluir acerca del valor de la desviación media? Coméntalo con tus compañeros y maestro.

Para tu apunte

Cuando el valor de la desviación media para un conjunto de datos es pequeño significa que la mayoría de los datos coinciden o están muy cerca de la media; también se entiende que los datos están concentrados en un rango pequeño. Por su parte, si el valor de la desviación media es grande, esto significará que la mayoría de los datos están alejados de la media, y por lo tanto se entiende que la dispersión es amplia.

Pongámonos de acuerdo

Se dice que el clima de Monterrey es extremoso. En una semana de febrero se registraron las siguientes temperaturas máximas:

29 °C   30 °C   32 °C   23 °C   16 °C   10 °C   20 °C

1. Reunidos en parejas calculen la media de los datos.
2. Calculen el rango de los datos.
3. Calculen la desviación media de los datos.
4. Con esta información:
   - ¿Qué razones darías para explicar por qué el clima de Monterrey es considerado como extremoso?

De vuelta al Explora

Aplica tus conocimientos aprendidos acerca de las medidas en un conjunto de datos para responder a la pregunta del EXPLORA.

- Con sólo conocer la media de las calificaciones de cada uno de los estudiantes ¿será suficiente para identificar al mejor estudiante?
- ¿Qué otra(s) medidas necesitas conocer para encontrar al mejor estudiante? Calcúlala(s).
- ¿Quién es el(la) mejor estudiante?, ¿por qué?

▲ El desempeño de un estudiante puede ser evaluado de diferentes maneras.

Practica

1. Para las siguientes listas de datos calcula el rango y la desviación media:

   a. 3, 5, 2, 3, 7
   b. 10, 16, 20, 18, 16
   c. 5, 5, 5, 5, 5
   d. 20, 50, 60, 20, 100

2. Calcula la media, el rango y la desviación media para las listas e indica cuál de ella tiene mayor dispersión y cuál menor.

	Media	Rango	Desviación media
1, 2, 4, 6, 7			
2, 4, 4, 4, 6			
2, 2, 4, 6, 6			

3. Escribe una lista de cinco datos en donde su media sea 5 y su rango también sea 5. Compárala con la de tus compañeros.
4. Investiga el registro de temperaturas máximas de la semana pasada de tu ciudad y toma nota de los siete días. Calcula la media, el rango y la desviación media, y luego concluye qué tan variable fue el clima en esa semana.
5. En parejas, diseñen un problema real donde sea necesario calcular la desviación media para tomar una decisión. Intercámbienlo con sus compañeros y revisen sus resultados.

Evalúa tu avance

1. La desviación media de la siguiente lista de datos es:

4 8 6 4 5 6 4 4

a. 2.25
b. 5.12
c. 1.15
d. 4

2. El rango de la siguiente lista es:

10 34 56 5 67 73 22 39 12 8 93

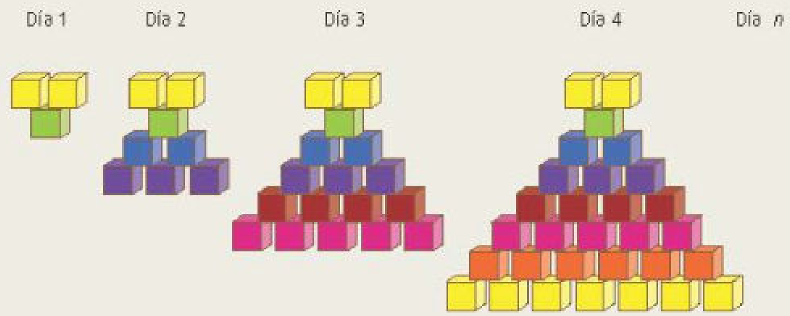
a. 60
b. 100
c. 78
d. 88

Evaluemos lo aprendido

✓ Evaluación tipo Planea

Subraya la opción que consideres correcta y, al terminar, con la guía del maestro, revisa en grupo tus respuestas.

1. Por su reciente cumpleaños, Víctor recibió como regalo de sus padres un juego de bloques armables de colores para estimular su imaginación. Al jugar con él, decidió construir una torre y que mientras quedaran bloques disponibles cada día agregaría un nuevo nivel de base. Los primeros días armó la torre según la siguiente secuencia:



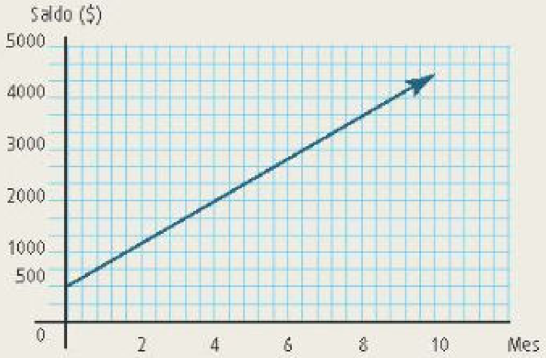
- De acuerdo con la secuencia, ¿cuál es la expresión algebraica que te permite calcular el número de bloques que utilizó Víctor el día n?

a. $n^2 - n + 3$
b. $3n^2 - 5n + 6$
c. $2n^2 - n + 2$
d. $4n^2 + n - 2$

2. Para la próxima obra de teatro de la escuela, Daniela está confeccionando un sombrero con forma de cono para completar su disfraz de mago del bosque. Antes de trazar y cortar sus patrones sobre cartón, debe resolver el asunto de las medidas. Sabe que el diámetro de su cabeza es de 17 cm, además espera que la longitud del pico del sombrero a la orilla mida 51 cm; sólo le falta averiguar algo más:
   - ¿Cuánto debe medir el ángulo central del sector circular de cartón del cual provendrá el sombrero?

a. 60° **b.** 120° **c.** 90° **d.** 45°

3. Paola tiene una cuenta de ahorros en el banco. La inició con un monto de 500 pesos y mensualmente ha abonado una misma cantidad los últimos 10 meses. La siguiente gráfica muestra cómo ha variado el monto total acumulado en su cuenta durante este tiempo.



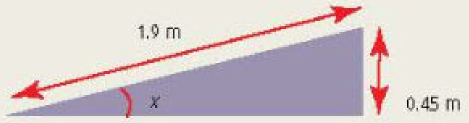
El modelo resultante es una línea recta.

- ¿Cuál es la pendiente de la misma?, es decir, ¿cuánto ha abonado mensualmente Paola a su cuenta?

a. $500 **b.** $4 500 **c.** $4 000 **d.** $400

4. Christian y sus amigos gustan de hacer trucos sobre patinetas. Se juntan en una plaza para practicar e improvisan una rampa que servirá para tomar impulso y realizar un riesgoso movimiento. Si el largo de la rampa es de 1.9 m y tiene una altura de 0.45 m, responde:

- ¿Cuál es el valor del ángulo formado por la rampa y el suelo?

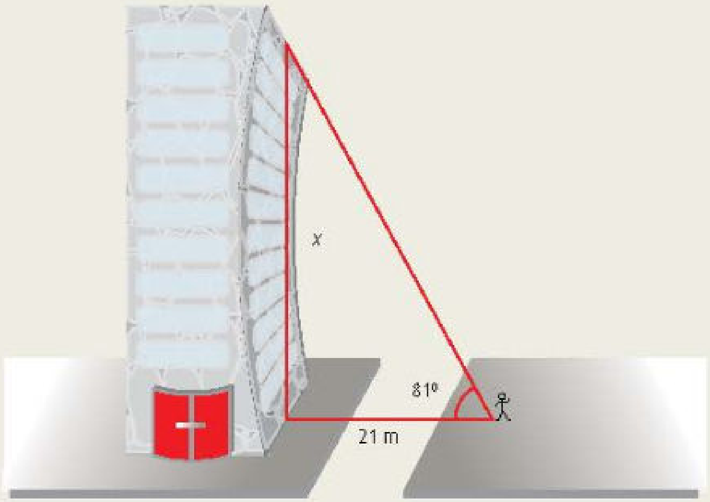


a. 0.2368 **b.** 13.7° **c.** 76.3° **d.** 13.32°

5. En su última visita a la capital para ver a sus tíos, Gregorio recorrió con sus papás el centro de la ciudad. Durante el paseo, se quedó pasmado con la altura que alcanzaban algunos de los edificios. Tras toparse con el que, a su juicio, era el más alto de todos los que vio, se animó a estimar su altura. Para ello, se posicionó desde la acera de enfrente a unos 21 metros de la base del edificio y, de manera muy ingeniosa, logró medir el ángulo de elevación del edificio, el cual fijó en 81°. Finalmente, con el uso de sus conocimientos sobre trigonometría, logró llevar a cabo el cálculo.

- ¿Cuál fue el valor que estimó para la altura del edificio?

a. 1 701 m **b.** 20.74 m **c.** 3.29 m **d.** 132.59 m



6. En clase de matemáticas, Alessandra encabeza a un equipo que debe exponer sobre las funciones lineales. Como parte de las actividades que aplicarán al grupo, ella presentará las siguientes tablas de datos y, con el apoyo del maestro, premiará con un puntaje extra sobre examen al primer alumno que identifique a la que haga referencia a una función lineal. ¿Cuál de las tablas de la siguiente página es la buscada?

a.

Lado del cuadrado (m)	Área del cuadrado (m^2)
1	1
2	4
5	25
10	100
20	400

b.

Antigüedad (años)	Valor del auto ($)
0	150 000
1	139 500
2	129 000
4	108 000
8	66 000

c.

Tiempo de caída libre (s)	Altura (m)
0	126
1	121.1
2	106.4
3	81.9
4	47.6

d.

Radio de la esfera (cm)	Volumen de la esfera (cm^3)
1	4.186
2	33.493
3	113.04
4	267.946
5	523.333

7. Renata y Mariana se están entrenando para las siguientes olimpiadas estatales de atletismo; se están especializando en la prueba de salto de longitud. Su entrenador lleva un registro diario de sus saltos y evalúa constantemente sus progresos, así como detecta lo antes posible desperfectos en sus técnicas. A continuación se presenta el registro de la última sesión de entrenamiento:

Saltos	1°	2°	3°	4°
Renata	3.80 m	3.75 m	4.10 m	3.92 m
Mariana	3.55 m	4.15 m	3.74 m	3.88 m

- Con base en la información de la tabla, ¿quién es la más consistente en sus saltos y por qué?
  - **a.** Renata, porque su promedio de salto es mayor que 4 metros.
  - **b.** Mariana, porque la desviación media de sus saltos es menor que 0.15 metros.
  - **c.** Renata, porque la desviación media y el rango de sus saltos son menores que los de Mariana.
  - **d.** Mariana, porque tiene el salto más largo y el rango de sus saltos es menor que el de Renata.

✓ Evaluación tipo PISA

John Harrison y el reloj que permite orientarse

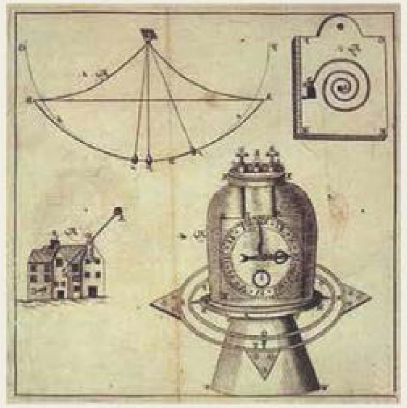
El ser humano tiene la necesidad innata de satisfacer la curiosidad que le provoca conocer lo que hay más allá de su comprensión y que lo ha llevado a explorar tanto en lo profundidad de los mares como en la lejanía del espacio. Los antiguos navegantes surcaron los mares usando mapas e instrumentos rústicos. Se aventuraron a descubrir un mundo ajeno a lo visto por la mayoría y, en muchos de los casos, se extraviaron en aguas misteriosas y desconocidas; muchas otras veces llegaron a tierras inexploradas y se asombraron con lo que encontraron.

En su afán de navegar los mares, el hombre recurrió a la observación de las estrellas y al uso de instrumentos nacidos de su propio ingenio, tales como la brújula, el astrolabio y el cuadrante, entre otros. Sin embargo esto fue insuficiente en muchas ocasiones en las que concluyeron su travesía extraviados o alejados de sus tierras por no saber orientarse apropiadamente. Se requería entonces de mejores instrumentos para conocer la localización durante el trayecto y hacia dónde se estaba yendo.

Cual si fuera un sistema cartesiano, cuyo origen estaría en el cruce de las líneas que representan al Ecuador y al meridiano de Greenwich, los seres humanos viajaron a través del globo posicionándose en diversos puntos. Para referenciar de forma adecuada tal posición, se requiere conocer dos magnitudes: latitud y longitud a la que alguien se encuentra respecto del origen propuesto. Durante cientos de años, fue posible navegar por el mundo siguiendo una latitud fija, usando el astrolabio o el cuadrante para guiarse, pero siempre existió el problema de la medición de la longitud. ¿Cómo hacer para medirla?

En el siglo XVIII entró en escena John Harrison, quien fabricó un reloj que permitía calcular la longitud (el cronómetro marítimo), a pesar de lo inclemente de las condiciones. Pero, ¿cómo es que un reloj podría permitir realizar ese cálculo? Básicamente, si se sincronizaba este reloj con el tiempo en el meridiano de Greenwich, y sabiendo la hora que marcaba el lugar donde te encontrabas, podrías saber qué tan lejos estabas de Londres; es decir, si el reloj marcaba medianoche y donde se encontraba el navío en el que te hallabas era mediodía, entonces estabas situado del otro lado del mundo con respecto a Londres.

En ese mismo siglo se creó el sextante, con el cual se conocía con mayor exactitud la latitud y, de esa forma, la navegación fue más sencilla que nunca para los navegantes, al menos en cuanto a localización se refiere.

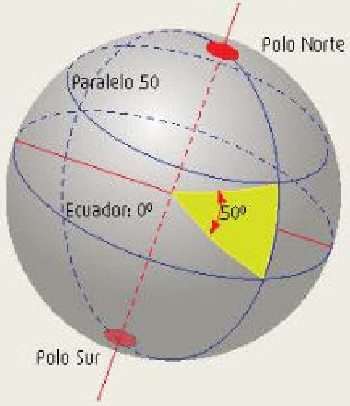


▲ Harrison reunió en el cronómetro marítimo todo lo necesario para que su maquinaria funcionara en un barco. (Dibujo de Jeremy Thacker).

1. John Harrison fue un gran y famoso relojero inglés por haber diseñado y puesto en funcionamiento el primer reloj marítimo de alta precisión con el que fue posible determinar la longitud cuando se han recorrido largas distancias. Su mérito fue haber resuelto el "problema de la longitud" mediante el empleo de cronómetros construidos por él mismo.
   - Investiga acerca de la vida y obra de John Harrison y explica detalladamente en qué consistía el problema de la longitud.
2. Investiga qué es el sextante:
   - ¿Por qué recibió ese nombre?
   - ¿Cuándo y quién lo creó?
   - Detalla cómo funciona.

El sextante fue durante varios siglos de gran importancia en la navegación marítima y en la navegación aérea.

3. La latitud a la cual se encuentre una ciudad, persona, o embarcación está muy relacionada con el tipo de clima que predomina en ese lugar, en tanto que la longitud se relaciona con el horario que rige en esa zona.
   - Describe a detalle cómo se dan estas relaciones.
4. La latitud se calcula por medios astronómicos, tales como tomar la altura del Sol sobre el horizonte a mediodía, o también midiendo la longitud de la sombra que proyecta un objeto vertical a mediodía; este objeto vertical sirve como reloj de Sol. Una vez conocida la altura de ese objeto vertical y la longitud de su sombra, podemos calcular el ángulo de incidencia de los rayos solares sobre la Tierra. Para ello, se resuelve el triángulo rectángulo formado por la altura de la vara y la longitud de su sombra usando funciones trigonométricas.
   - Si una vara de 1.25 m de largo es clavada en un cierto punto del planeta Tierra, y al mediodía produce una sombra de 0.875 m, ¿cuál es el ángulo de incidencia que tienen los rayos solares sobre la Tierra?:



5. Desde hace siglos, la preocupación del hombre por orientarse en sus viajes y exploraciones para llegar a su destino sin extraviarse ha sido una constante. En la actualidad existen sistemas guiados por satélites que permiten una localización más precisa: los sistemas GPS. Los receptores más sencillos están preparados para determinar, con un margen mínimo de error, la latitud, longitud y altura desde cualquier punto de la Tierra donde nos encontremos situados. Su funcionamiento se basa en el principio matemático de la triangulación.
   - Investiga: ¿Qué significa "GPS"? ¿Cuántos satélites conforman este sistema? ¿En qué consiste el principio de la triangulación?
   - Descríbelo plenamente.

Existen diferentes soluciones GPS para cada necesidad de rastreo. Algunos equipos rastrean vehículos como autos, y otros equipos son para rastrear personas.

Además del sistema GPS, existen otras alternativas como el GLONASS, creado por el gobierno ruso pero con mayores limitaciones para el uso civil; también se creó el sistema GALILEO, controlado por la Unión Europea y de origen civil. Se espera que este sistema sea mucho más preciso que el GPS.

El empleado del mes

En la fábrica en que labora mi tío se premia con un bono económico al empleado más productivo de cada mes. Hacia la recta final del presente, hay una competencia bastante cerrada de cuatro posibles ganadores. Se trata de aquellos empleados que durante el mes elaboraron la mayor cantidad de piezas que aprueban el control de calidad con el menor número de piezas defectuosas en su máquina. En la tabla siguiente se resume su producción semanal de piezas fabricadas sin defectos y el total de piezas defectuosas al final de mes:

1. A partir de la información presentada:
   - ¿Cuál es el promedio de piezas fabricadas por semana que aprueban el control de calidad de cada uno de los empleados?
   - ¿Quién sería el ganador del bono de este mes?
2. Si el premio se entregara semanalmente y no mensualmente:
   - ¿Quién sería el ganador del bono cada semana si se considera el promedio del número de defectos por semana?
3. En la fábrica se quiere reconocer, además, al trabajador más constante en su trabajo, es decir, a quien por su constancia presente menor diferencia en su producción semana a semana.
   - ¿Quién debería ser distinguido con ese reconocimiento?

BLOQUE 5

B5

COMPETENCIAS

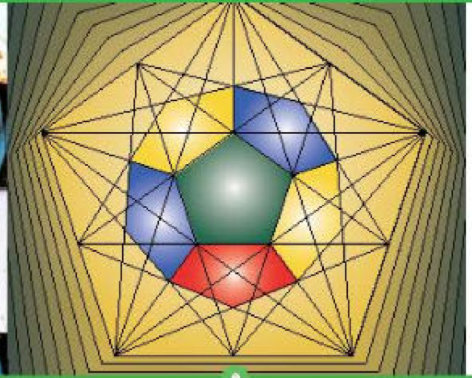
- Resolver problemas de manera autónoma.
- Comunicar información matemática.
- Validar procedimientos y resultados.
- Manejar técnicas eficientemente.


a


b


c


d


e


f

APRENDIZAJES	EJES	SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO	FORMA, ESPACIO Y MEDIDA	MANEJO DE LA INFORMACIÓN
• Resolverás y plantearás problemas que involucran ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado. • Resolverás problemas que implican calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen. Anticiparás cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones. • Leerás y representarás, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas. • Resolverás problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.	TEMAS Y LECCIONES	**Patrones y ecuaciones** 128 Resolverás problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formularás problemas a partir de una ecuación dada.	**Medida** 129 Analizarás las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Calcularás las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto.	**Proporcionalidad y funciones** 132 Analizarás situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.
			130 Construirás las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides.	**Nociones de probabilidad** 133 Analizarás las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.
			131 Estimarás y calcularás el volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadasen las fórmulas.	

a. La máquina diferencial fue inventada por Charles Babbage en 1822 para tabular polinomios.

b. Escultura de concreto conformada por una serie de pirámides.

c. Las funciones te ayudan a correlacionar datos.

d. Conocer cómo se calcula la capacidad de los recipientes o cuál es su volumen, es muy útil para muchas actividades tanto industriales como cotidianas.

e. Las figuras inscritas son figuras que están dentro de otras figuras.

f. Al cortar un cono se generan las secciones cónicas.

Engánchate

La máquina analítica y su primera programadora

Augusta Ada King, Condesa de Lovelace, mejor conocida como Ada Lovelace (1815-1852) se conoce con frecuencia como "la primera programadora". Esto se debe a su trabajo con la máquina analítica diseñada por Charles Babbage en 1837. Esta máquina, jamás construida en su totalidad, funcionaría (en teoría) de manera mecánica, mediante engranes y a base de vapor, y los datos se manejarían mediante el uso de tarjetas perforadas (sin teclados ni pantalla).

Si bien la máquina nunca ha sido construida (existen actualmente proyectos para completarla) la teoría de cómo funcionaría fue suficiente para desarrollar, a su vez, teorías e ideas de cómo utilizarla.

Como matemática, Ada Lovelace se interesó en gran medida en la máquina diseñada por Babbage. Entre sus notas sobre su funcionamiento hay ideas de cómo esta máquina podría ser usada de maneras mucho más generales que para calcular operaciones aritméticas. En estas notas se encuentra el primer algoritmo para programar una máquina del que se tiene registro y es este resultado por el que se le otorga el título de la primera programadora. Su aportación más reconocida fue darse cuenta (y explicar) cómo la máquina (que sólo existía en teoría) podría ser manipulada para obtener resultados generales.

Un algoritmo es un conjunto ordenado y finito de reglas o instrucciones que permite encontrar la solución a un problema; por ejemplo, el método para encontrar el máximo común divisor entre dos números enteros positivos. ¿Cómo crees que funciona el algoritmo?

Piensa en la dificultad de diseñar los pasos, sin brincarte ninguno, para ordenar a una máquina hacer operaciones por primera vez cuando no había existido nunca una calculadora, menos aún una computadora.

Puedes intentarlo si tratas de describir los pasos que debes seguir para ponerte de pie, o lo que haces para aprenderte una canción.

Hoy la mayoría de las computadoras están fabricadas para generar un "ambiente amigable", donde imitan una mesa de trabajo con carpetas para guardar documentos.

- ¿Puedes imaginar cómo hace una persona que casi no ve para trabajar con una pantalla de computadora?
- ¿Cómo le explicarías lo que significa el uso del ratón para posicionar el cursor en la pantalla sobre un icono que tiene forma de carpeta, pero no es una carpeta real?

En una época en la que las mujeres no tenían acceso a los estudios superiores, Ada Lovelace fue reconocida y admirada por los científicos y matemáticos contemporáneos de su época.

Lee más...

Acerca de Ada Lovelace: http://euclides59.wordpress.com/2012/10/28/ada-lovelace-biografia-y-obra/

Libros del rincón: Newth, Eirik, *Breve historia del futuro*, México, Ediciones Robinbook, 2006.

Patrones y ecuaciones

Lección 28

Resolverás problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formularás problemas a partir de una ecuación dada

Explora

Cambio de compañía

Dos compañías de telefonía celular ofrecen su servicio de comunicación a diferentes costos. La compañía Telemax brinda su servicio por un pago inicial de 480 pesos y una mensualidad de 125 pesos, mientras que la compañía Uppercom brinda su servicio por un pago inicial de 120 pesos y una mensualidad de 185 pesos.

- ¿Cuál compañía es más conveniente contratar?

Descubre y construye

• Viajeros en autobús

En el paradero de autobuses metropolitano se cobra 1.50 pesos si viajas menos de un kilómetro y 4 pesos si viajas más de un km. En cierto día, viajaron 2200 personas y se recolectó 5050 pesos.

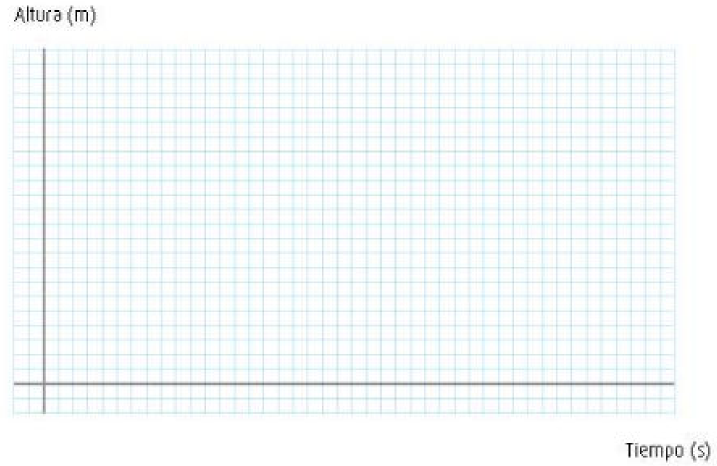
1. Plantea una ecuación para el total de personas que viajaron menos de un kilómetro y las que lo hicieron más de un kilómetro.
2. Plantea otra ecuación, usando las mismas variables, para el total del dinero recolectado de los viajes en autobús.
3. Usa ambas ecuaciones para encontrar los valores desconocidos: personas que viajaron menos de un kilómetro y personas que lo hicieron más de un kilómetro. Recuerda que puedes usar el método de sustitución, igualación, o suma y resta para resolverlas.

- ¿Cuántas personas viajaron menos de un kilómetro?
- ¿Cuántos viajaron más de un kilómetro?

• Lanzamiento de piedra

Una piedra que se lanza hacia arriba con una velocidad de 32 m/s, alcanza una altura de acuerdo con la siguiente ecuación: $h = 32t - 4.9t^2$.

1. Responde:
   - ¿Cuánto tiempo tarda la piedra en estar en el aire?
   - ¿Cuánto tiempo tarda la piedra en alcanzar su punto más alto?
   - ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la piedra?
   - ¿En qué tiempo (segundos) la piedra se encuentra a una altura de 30 metros?
2. Traza la gráfica de la altura alcanzada por la piedra en el recorrido con respecto al tiempo.



▲ Gráfica de altura alcanzada por la piedra con respecto al tiempo.

• Plantea un problema

1. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$x + y = 10$$
$$100x + 200y = 1\,600$$

   - ¿Cuál es el valor de x?
   - ¿Cuál es el valor de y?
2. Una vez que ya conoces las soluciones del sistema, plantea y redacta un problema en donde las ecuaciones dadas sean las necesarias para darle solución. Comparte tu problema con un compañero y verifiquen que ambos planteamientos estén bien elaborados y que se resuelvan con el sistema de ecuaciones dado.

Para tu apunte

Un sistema de ecuaciones lineales de dos ecuaciones y dos variables puede resolverse usando el método de sustitución, siguiendo estos pasos:

1. Dado el sistema $x + y = 35$ y $2x - y = 25$, tomar una de las ecuaciones y despejar una de las variables. Aquí se eligió despejar y:
$$x + y = 35 \rightarrow y = 35 - x.$$
2. Sustituir el valor despejado $y = 35 - x$ y sustituirlo en la otra ecuación:
$$2x - y = 25 \rightarrow 2x - (35 - x) = 25.$$
3. Con la ecuación $2x - (35 - x) = 25$, encontrar el valor para la variable:
$$2x - 35 + x = 25$$
$$3x - 35 = 25$$
$$3x = 25 + 35$$
$$x = \frac{60}{3}$$
$$x = 20$$
4. Por último, se sustituye el valor encontrado $x = 20$ en la ecuación despejada en un inicio $y = 35 - x$:
$$y = 35 - 20 \rightarrow y = 15.$$

Para tu apunte

En una ecuación cuadrática $y = ax^2 + bx + c$, la abscisa del punto más alto o más bajo de su gráfica (parábola) puede calcularse mediante la fórmula: $x = \frac{-b}{2a}$

Para tu apunte

Recuerda que al graficar una ecuación cuadrática, las intersecciones de ésta las puedes obtener evaluando en la ecuación $x = 0$ y despejando para y, así obtendrás las intersecciones en el eje y; si evalúas $y = 0$ y obtienes los valores de x, éstas serán las intersecciones en el eje x.

3. Escribe un problema para la ecuación $y = 20x - x^2$. Traza primero su gráfica y observa los extremos y las intersecciones; una vez que los conozcas será más fácil que pienses en un problema. Intercámbialo con algún compañero y resuélvanlo.
4. Plantea otro problema diferente que involucre una ecuación cuadrática. Verifica que su solución tenga sentido, es decir, que sea lógica.

Pongámonos de acuerdo

Damián repartió entre sus amigos su colección de estampas de su cómic preferido. La dividió y distribuyó por partes de la siguiente manera: a Daniel le dio la tercera parte, a Miguel la sexta, a Adrián la cuarta, a Diego la doceava, a Alex la décima parte y él se quedó con sus 12 estampas favoritas.

1. Junto con un compañero planteen una ecuación que represente la repartición con el total de estampas.
2. Resuelvan la ecuación.
   - ¿Cuántas estampas tenía Damián en su colección?
3. Escriban cuántas estampas le correspondieron a cada uno:

   Daniel: ______

   Miguel: ______

   Adrián: ______

   Diego: ______

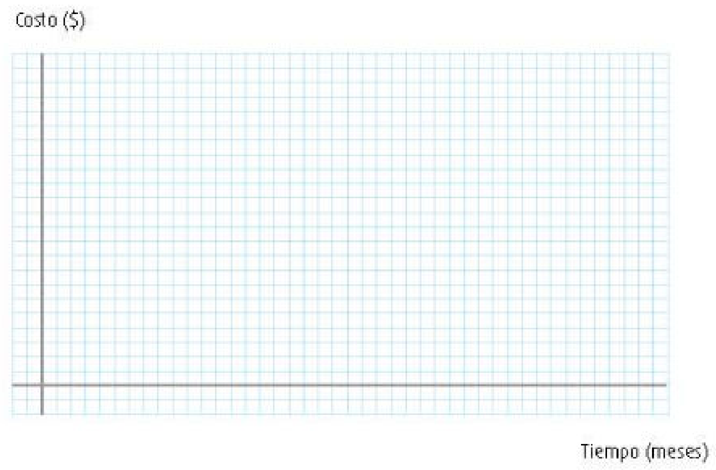
   Alex: ______

   Damián: ______

De vuelta al Explora

A fin de poder tomar una decisión acerca de cuál compañía contratar para el servicio de comunicación, es necesario plantear para ambas compañías las ecuaciones que modelen el costo acumulativo por el servicio a lo largo de los meses y analizar cómo aumenta éste.

1. Plantea una ecuación para la compañía Telemax, la cual cobra un pago inicial de 480 pesos y una mensualidad de 125 pesos.
2. Plantea una ecuación para la compañía Uppercom, la cual cobra un pago inicial de 120 pesos y una mensualidad de 185 pesos.
3. Traza ambas gráficas en un mismo plano cartesiano.



▲ Gráfica comparativa de costos de telefonía celular.

4. De acuerdo con la información de la gráfica:
   - ¿Qué compañía tiene sus costos más económicos?
   - ¿En algún momento el costo por el servicio es el mismo?, ¿en cuál?
   - Antes de ese tiempo, ¿cuál compañía conviene contratar?
   - Después de ese tiempo, ¿conviene contratar la misma compañía?
   - Si se desea contratar el servicio por un tiempo limitado de cuatro meses, ¿cuál compañía recomiendas?
   - Si se desea contratar el servicio por un tiempo prolongado, de dos o tres años, ¿cuál compañía recomiendas?
   - ¿Cuánto ahorrarías si contratas la compañía más conveniente por dos años en comparación con la otra?

Practica

1. La suma de los dos dígitos que forman un número da 7. Cuando los dígitos son invertidos, el número se aumenta en 27. Plantea y resuelve la ecuación para este problema.
2. Dadas las siguientes ecuaciones, redacta un problema para cada una:

   a. $8 + 7.5x = 53$

   b. $x(x - 4) = 96$

   c. $x = 2y$
   $x + y = 48$

3. En una reunión de 108 personas, hay el doble número de mujeres que de hombres, y el triple número de niños que de hombres.
   • ¿Cuántos hombres, mujeres y niños hay?

4. En una granja se tienen cerdos y pavos, en total hay 35 cabezas y 116 patas.
   • ¿Cuántos cerdos y pavos hay?
     ⇒ Plantea un sistema de ecuaciones y resuélvelo.

5. Visita la página http://www.conevyt.org.mx/colaboracion/colabora/objetivos/libros_pdf/sma3_u2lecc14.pdf
   ⇒ Repasa los problemas de sistemas de ecuaciones resueltos.
   ⇒ Luego elige dos de los problemas de la penúltima y última página y resuélvelos.

Evalúa tu avance

1. La base de un rectángulo es el doble que su altura, ¿cuáles son sus dimensiones si el área es de 50 centímetros cuadrados?

   a. Largo = 15, ancho = 7.5
   b. Largo = 10, ancho = 5
   c. Largo = 14, ancho = 7
   d. Largo = 25, ancho = 2

2. Cuáles son las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$-2x + y = -19$$
$$x + 3y = -1$$

   a. $x = 5;\ y = -4$
   b. $x = -2;\ y = -4$
   c. $x = 8;\ y = -3$
   d. $x = -7;\ y = 1$

Medida

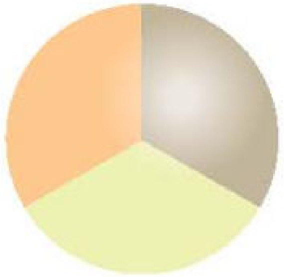
Lección 29

Analizarás las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Calcularás las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto

Explora

Construcción de conos

1. Traza en un papel un círculo de 6 centímetros de radio y divídelo en tres sectores con la misma área.



2. Dobla una de las secciones de tal manera que quede un cono.

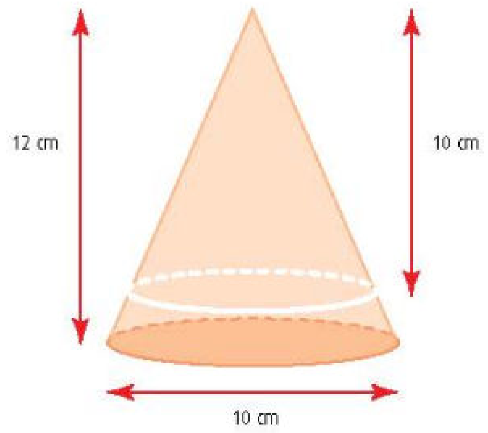
• ¿Qué altura tiene el cono?

Descubre y construye

• La lámpara de mano

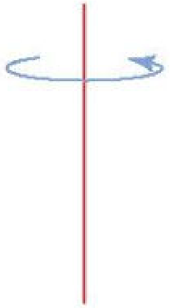
Dos diseñadores industriales están creando una lámpara que tiene una terminación de forma cónica.

Justo antes de terminar el borde del cono quieren colocar una banda circular de color blanco, tal como se muestra en la siguiente figura:



1. Primero responde:
   - ¿Cuál es el radio del cono?
   - ¿Cuál es la altura del cono?
2. Dadas las medidas de la sección cónica y la posición de la banda circular:
   - ¿Cuál es el radio de esta banda de color blanco?
3. Calcula la medida de la generatriz del cono (si no recuerdas qué significa generatriz, revisa la lección 22 del bloque 4).

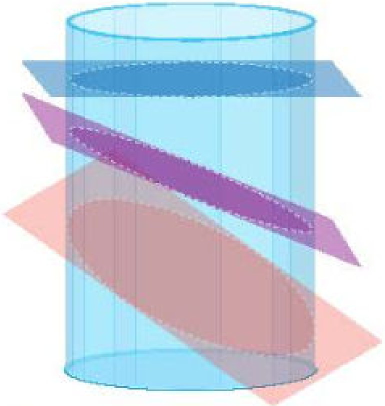
4. Dibuja la figura plana que al rotarse sobre el eje indicado genera el cono anterior e indica en ella las medidas del radio, la altura y la generatriz del cono.



   - ¿Qué figura plana dibujaste?
5. En la figura plana que dibujaste, indica y marca a qué altura se encuentra la banda circular de color blanco.
   - ¿Cómo calculas el radio de la banda circular de color blanco? Comenta con tus compañeros.
   - ¿Cuánto mide el radio de la banda?

• El cilindro y sus cortes

1. Observa los siguientes cortes planos del cilindro.

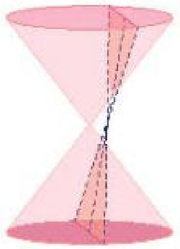


▲ Cortes planos del cilindro.

2. Ahora responde las siguientes preguntas:
   - ¿Qué figuras resultan al cortar el plano con el cilindro?
   - ¿Qué figura resulta en el plano que corta de forma vertical al cilindro?
   - ¿Qué otras figuras pueden resultar de cortes de planos con el cilindro?
   - En el caso del corte de un plano horizontal con el cilindro, ¿qué relación hay entre las medidas del cilindro y las medidas de la figura resultante?
   - En el caso del corte de un plano vertical con el cilindro y que además el plano pasa por el centro de la base del cilindro, ¿qué relación hay entre las medidas del cilindro y las medidas de la figura resultante?

Para tu apunte

En realidad el cono como lo conocemos es solamente la mitad del cono completo.



▲ Desarrollo completo de una superficie cónica.

Es por ello que uno de los cortes con un plano da por resultado una hipérbola.

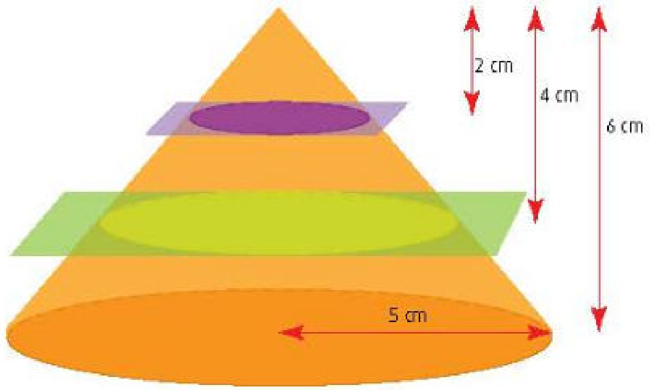
Para tu apunte

Entra a la siguiente página y estudia los cortes planos que puede tener un cilindro. Además, analiza los desarrollos planos que se obtienen después del corte y toma notas en tu cuaderno sobre los tipos de corte que se pueden hacer:
www.matematicasvisuales.com/html/geometria/planenets/cylinderobliq.html

• Los cortes del cono

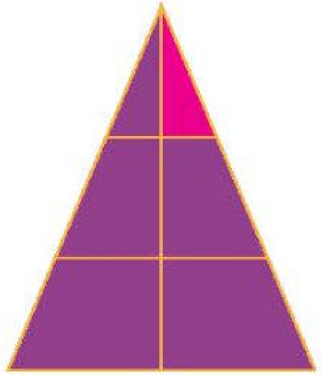
El siguiente cono tiene una altura 6 cm y una base circular de 5 cm de radio. Se han hecho cortes horizontales a 2 cm y 4 cm.

- ¿Qué radio tiene cada uno de los círculos que quedan?



▲ Esquema del cono y sus cortes.

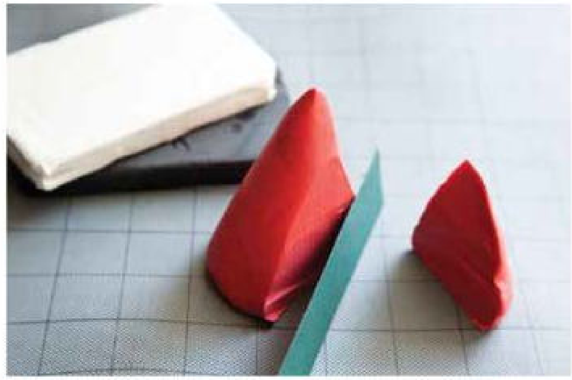
1. Para calcular el radio de los círculos traza el triángulo que genera el cono y divídelo en triángulos rectángulos a la altura de los cortes.



2. Ahora calcula la hipotenusa del triángulo rosa dividiendo entre 3 la hipotenusa de la generatriz del cono.

• Cono de Apolonio

1. Investiga junto con tus compañeros qué es el "cono de Apolonio".
2. Consigue plastilina y un pedazo de cartón. Con la plastilina haz un cono y con el pedazo de cartón haz cortes planos e intenta reproducir el cono de Apolonio.



▲ Reproducción del cono de Apolonio.

3. Responde:
   - ¿Qué inclinación debe tener el cartón para poder elaborar cada corte del cono de Apolonio?
   - ¿Qué figuras planas se obtienen al cortar el cono como lo hizo Apolonio?
   - ¿Cuántas figuras distintas pudiste obtener?

Para tu apunte

A las figuras resultantes del corte de un plano al cono se les conoce como **secciones cónicas** por ser resultantes de cortar el cono con un plano.

⇒ Investiga más sobre estas secciones y sus particularidades.

Pongámonos de acuerdo

A un cono de base circular de 7.5 cm de radio y altura total de 15 cm se le hacen cortes horizontales a diferentes alturas.

1. Reunidos en parejas, completen la siguiente tabla:

Altura del corte horizontal	Radio del círculo resultante del corte	Volumen del corte al vértice
2 cm		
	5 cm	
7 cm		
	3 cm	

2. Después de completar la tabla respondan en grupo las siguientes preguntas:
   - ¿Qué relación tiene el radio de la circunferencia resultante de hacer cortes paralelos a la base de un cono con la altura de estos cortes?
     ⇒ Expresen algebraicamente el radio de las circunferencias en término de la altura de los cortes.

De vuelta al Explora

Este problema es un poco largo pero verás que lo lograrás resolver.

1. Para comenzar calcula el radio de la base del cono. Ya sabes que la generatriz mide 6 cm.
2. Con este dato y el radio del cono puedes utilizar el Teorema de Pitágoras para calcular el dato que necesitas.

Practica

1. ¿Cuál es la altura de un cilindro que tiene en uno de sus cortes horizontales un círculo de radio 3 y el volumen del cilindro es 282.6? (Usa $\pi = 3.14$).
2. ¿Cuál es el área de un círculo obtenido por cortar un cono circular de 5 cm de radio y altura de 10 cm por sus 2/3 partes?
3. Un papel en forma semicircular se dobla de tal manera que queda un cono con un radio de 5 cm. Calcula:
   a. El diámetro de la base del cono.
   b. La superficie del cono.
4. En cualquier cilindro de altura finita:
   - ¿Cuál es el corte que resulta con la mayor área posible?
   - ¿Cómo podrías demostrar esto?
5. Un cono de 7 cm de altura y 10 cm de diámetro en la base es cortado por diferentes planos: uno horizontal que lo corta por la mitad de su altura, y otro vertical que pasa por el centro.
   - ¿Qué figuras se forman con cada corte y cuáles son sus dimensiones?.

Evalúa tu avance

1. Un papel circular de radio 15 es cortado con un ángulo de 90°. Con el papel restante se hace un cono.
   - ¿Cuál es el radio de la base circular del cono?

   a. 15π
   b. 30π
   c. 22.5π
   d. 11.25π

2. ¿Qué figura resulta de cortar un cilindro con un plano en diagonal?

   a. Círculo
   b. Triángulo
   c. Elipse
   d. Hipérbola

Medida

Lección 30 Construirás las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides

Explora

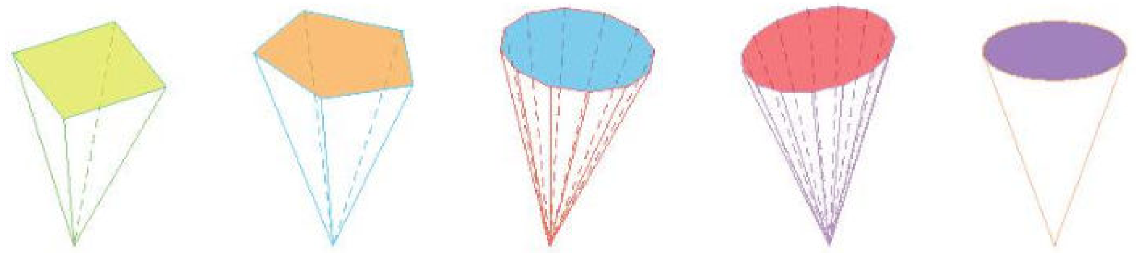
Diferencia de áreas

- ¿Cuál es la diferencia entre el área de un cuadrado inscrito en un círculo de 5 cm de radio?
- ¿Cuál es la diferencia entre el área de un hexágono inscrito en un círculo de 5 cm de radio?
- ¿Cuál es el polígono inscrito en un círculo de 5 cm de radio que deja menos espacio entre ellos?

Descubre y construye

- El volumen del cono

1. Observa los siguientes cuerpos geométricos y calcula su volumen. Todas las pirámides tienen 10 cm de altura y la misma apotema de 3 cm. El radio del círculo es de 3 cm.



▲ Base cuadrangular ▲ Base pentagonal ▲ Base dodecagonal ▲ Base icosagonal (20 lados) ▲ Cono

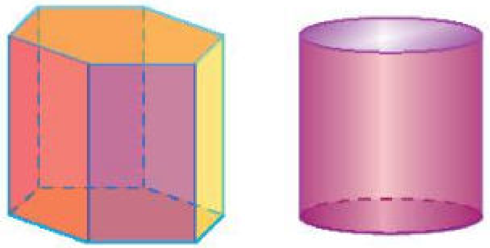
2. Observa que entre más lados tiene la base del prisma más se acerca a un círculo.
3. Reflexiona con tus compañeros las similitudes de obtener el volumen de un cono y el volumen de cualquier pirámide con base.

Para tu apunte

Un **círculo** puede verse como un polígono de lados infinitos, o simplemente como todos los puntos que distan algún valor (radio) de un punto llamado centro.

• El problema de la diferencia

1. Analiza los siguientes cuerpos. Si la apotema del prisma hexagonal es igual al radio de la base del cilindro y ambos tienen la misma altura:



- ¿Cuál es la diferencia entre el volumen de ambos cuerpos?
- ¿Cuáles son las diferencias al calcular el volumen de cualquier prisma y cualquier cilindro?
- Plantéate este verdadero reto: ¿cuánto tendría que medir la altura del cilindro para que su volumen fuera exactamente el mismo que el del prisma?

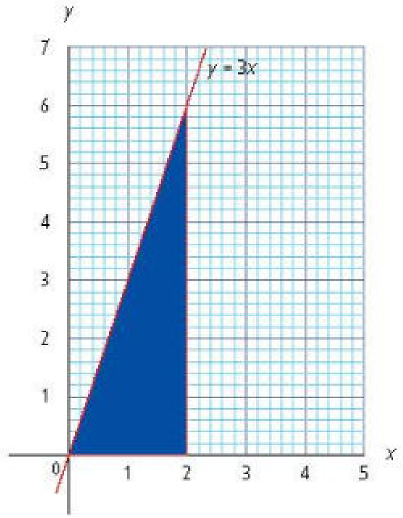
Para tu apunte

El volumen del cilindro se puede deducir obteniendo las fórmulas para calcular el volumen de prismas con diferentes bases.

- ¿Podrías explicar cómo es el proceso de deducción?

• La peculiar figura y su volumen

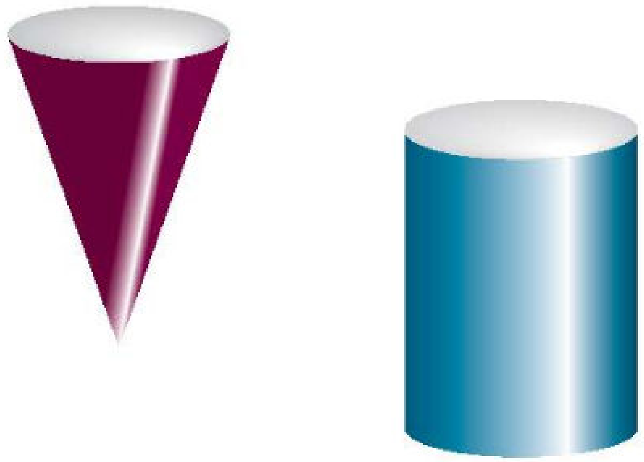
1. Calcula las dimensiones de un cuerpo tridimensional generado por la rotación del triángulo sombreado en torno al eje de las ordenadas.



2. Para ayudarte a visualizar el cuerpo, utiliza la técnica del palillo y el papel. Imagina que pegas un pedazo de papel con la forma del triángulo azul y lo giras en torno al eje *y*.
   - ¿Qué figura se generaría?
   - ¿Cuál sería su volumen interior?
   - ¿Cuál sería el volumen exterior?
3. Otra posibilidad es imaginar que la figura resultante es un cilindro menos un cono.
   - ¿Lo visualizas?

• Un resultado previsible

¿Cuáles tienen que ser las dimensiones de un cilindro para que el volumen de un cono quepa tres veces en el cilindro?



Para poder resolver este problema es necesario plantear una ecuación en la que el volumen del cilindro sea igual a tres veces el volumen del cono.

1. Discute con tu maestro cómo podrías plantear y resolver dicha ecuación.
   - ¿Puedes resolver el problema sin plantear la ecuación?
   - ¿Qué datos necesitas para asegurar que el cilindro ocupa el mismo volumen que tres conos?
   - ¿Cuáles son las dimensiones del cilindro para que el volumen del cono quepa tres veces dentro de éste?
2. Construye con papel un cono (sin tapa) y un cilindro (con una sola tapa) que tengan la misma altura y el mismo radio.
   ⇒ Llena el cono de arroz y pásalo al cilindro, continúa haciéndolo hasta que se llene el cilindro.
   ⇒ Verifica que con tres conos de arroz se llena el cilindro.

Pongámonos de acuerdo

1. Con todo lo visto anteriormente, planteen en grupo las fórmulas para obtener el volumen de un cono y un cilindro y su relación con las fórmulas del volumen de la pirámide y los prismas.
2. En 5º de primaria se plantea que los alumnos conozcan las fórmulas para calcular el volumen de conos, cilindros, pirámides y prismas.
   ⇒ Reunidos en equipos, planeen una clase para que sus "alumnos" de 5º de primaria comprendan cómo calcular los volúmenes del cilindro y el cono a partir de pirámides y prismas.
   ⇒ Puede ser una clase con exposición, material concreto, preguntas, juegos, discusión, problemas, presentación multimedia, etcétera.
   ⇒ Piensen que siempre es mejor que "el alumno" construya su conocimiento, paso a paso, con material concreto, en vez de decírselo directamente.
   ⇒ Redacten la clase y pónganla en práctica.

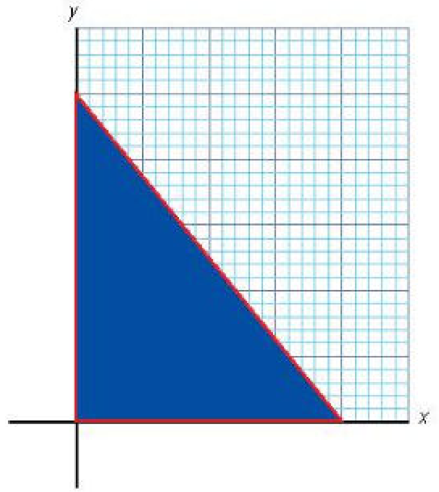
De vuelta al Explora

1. Con lo que has aprendido a lo largo de la lección:
   • ¿Puedes dar una respuesta exacta y encontrar el polígono que deje menos espacio entre esta figura inscrita en un círculo de 5 cm de radio?
   • ¿Qué pasa con la diferencia entre las áreas mientras el polígono inscrito tiene más lados?
2. Argumenta cómo este resultado se parece al cálculo del volumen del cono o del cilindro.

Practica

1. En la comunidad "Tierra y Libertad" cada casa consume 15 litros de agua al día (recuerda que un litro equivale a un dm^3). Si se quiere construir un pozo cilíndrico con una capacidad para dar abasto a 200 casas durante 30 días:
   • ¿De qué capacidad tiene que ser el pozo?
   ⇒ Plantea al menos otras dos dimensiones para guardar el mismo volumen de agua en pozos de forma cilíndrica.

2. En la misma comunidad decidieron que no construirían el pozo forma cilíndrica, sino que lo harían en forma de prisma.
   • ¿Qué prisma y de qué dimensiones elegirías para abastecer de agua durante 30 días?
   ⇒ Compara tus respuestas con las de tus compañeros y busquen la que resulte más exacta.
3. Si el triángulo azul indicado en el siguiente plano cartesiano girara en torno a los catetos:
   • ¿Cuál de los cuerpos resultantes quedaría con más volumen? ¿El cono que rota sobre el eje x o el eje y?



3. Un cubo de hielo de 4 cm de arista se coloca en un vaso cilíndrico de 3 cm de radio y 7 cm de altura.
   • Cuando se derrita el hielo, ¿cabrá el agua dentro del vaso?
4. Calcula la superficie y el volumen de un cono cuyo radio de la base es de 2 cm y la altura es de 3 centímetros.

Evalúa tu avance

1. ¿Cuál es volumen máximo de un cono inscrito en un cilindro de 4 m de altura y radio de la base de 2 m?
   a. 4.19 m^3
   b. 16.75 m^3
   c. 50.26 m^3
   d. 25.13 m^3
2. Un cono con base circular de 20 cm de perímetro y 5 cm de altura está lleno de agua. Si la masa del cono con agua pesa un kilogramo.
   • ¿Cuál es la masa aproximada del cono vacío?
   a. 523.59 g
   b. 356.23 g
   c. 476.40 g
   d. 946.92 g

Medida

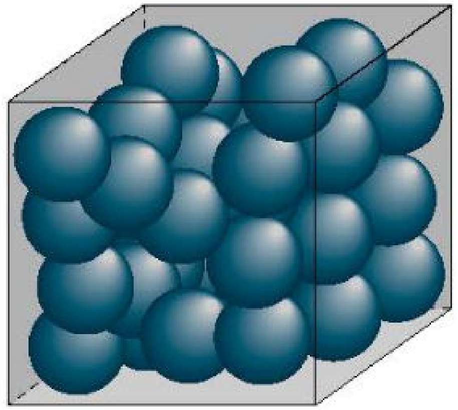
Lección 31 Estimarás y calcularás el volumen de cilindros y conos, o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas

Explora

La caja de esferas

No todos los problemas matemáticos por burdos que parezcan tienen una solución. Un ejemplo es el famoso "empaquetamiento de esferas". El problema típico es:

- ¿Cuál es la mejor manera de acomodar esferas del mismo tamaño dentro de un cubo rellenando el mayor espacio posible?



1. Comenta con un compañero cuáles son las dificultades que pueden surgir al acomodar las esferas y hagan una hipótesis sobre cuál es la mejor manera de hacerlo.
2. Intenta resolver el problema con un cubo de 1 m de lado y pelotas de 5 cm de radio.

Descubre y construye

- ¿Qué datos necesito?

En la casa de Juan hay un tanque de agua como el de la fotografía:

▲ Ante la escasez de agua muchas familias reservan agua potable en tambos.

- ¿Cuánta agua se necesita para llenarlo?
- ¿Qué datos necesitas para poder saberlo?

1. Cada alumno de la clase plantea y resuelve un problema en el que debe dar la información necesaria para poder calcular el volumen del tanque.
2. Intercambia tu problema con el de un compañero. Cada uno debe intentar resolver el del otro y compartir sus resultados.
3. Recuerda plantear el problema con las unidades adecuadas. Por ejemplo, elige si usarás metros cúbicos (m^3), litros o decímetros cúbicos (dm^3).
   - ¿Qué diferencias hay entre cada una de estas unidades?

Para tu apunte

Un **cilindro** se puede considerar como el caso límite de un prisma de lados infinitos. Por lo tanto el volumen es igual al área de la base por la altura.

- La nave mexicana

La nueva Agencia Espacial Mexicana quiere construir un satélite de forma cónica cuya capacidad sea de 100 litros (los litros no sólo sirven para medir líquidos, cualquier espacio puede ser medido en litros: lo que le cabe a tu zapato, el espacio que ocupas en un salón, el tamaño de un armario, etcétera).

- ¿Cuál es la altura que debe tener dicho cono si el perímetro de la base es de 24.6 cm?

- ¿Cuántos cilindros?

1. En la siguiente tabla, coloca todas las medidas posibles del radio de la base y la altura de un cilindro cuyo volumen es de 15 cm^3.
   ⇒ Da valores al radio. El volumen debe ser de 15 cm^3.
   ⇒ Sustituye estos valores en la fórmula del volumen del cilindro.

	Radio de la base	Altura del cilindro	Volumen
Cilindro 1			15 cm^3
Cilindro 2			15 cm^3
Cilindro 3			15 cm^3
Cilindro 4			15 cm^3
Cilindro 5			15 cm^3
Cilindro 6			15 cm^3
Cilindro 7			15 cm^3
Cilindro 8			15 cm^3
Cilindro 9			15 cm^3
Cilindro 10			15 cm^3

2. Al finalizar la tabla, grafica los radios y las alturas en unos ejes de coordenadas. Une los puntos y observa la figura resultante.
3. Aproximadamente, ¿cuál es el cilindro con más radio que se puede construir para que tenga un volumen de 15 cm^3?
4. Haz lo mismo con un cono y descubre cuál es el radio máximo de la base si el volumen es de 15 cm^3.

Pongámonos de acuerdo

1. Organizados en parejas resuelvan el siguiente problema:
   - ¿Cuáles son las dimensiones del cilindro con mayor volumen que puede caber dentro de un cono?
2. Haz un boceto junto con tu compañero, encuentren y justifiquen su respuesta.
3. Presenten su respuesta ante el grupo.

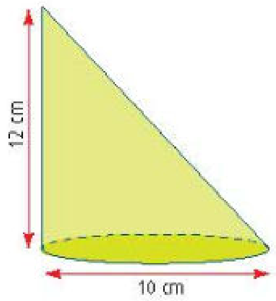
De vuelta al Explora

1. Intenta resolver el problema del acomodamiento de esferas para un caso particular donde tú mismo defínas las dimensiones del cubo y de las esferas.
2. Plantea un problema para el caso en dos dimensiones (con un rectángulo y círculos) y pide a un compañero que lo resuelva.
3. Asimismo, resuelve el problema de un compañero e intenta demostrar que tu acomodo de círculos es el que más área ocupa del rectángulo.
4. Ahora da algunas hipótesis de cómo resolverías el problema en tres dimensiones.
5. Desarrolla una hipótesis de cómo resolver el problema de cuál es el mejor acomodo de esferas en un prisma:
   - ¿Dependerá de las medidas de cada objeto?
     ⇒ Intenta demostrar que tu hipótesis es errónea, para consolidar tu argumento.
6. Discute, debate y convence a otros de que tu hipótesis es la mejor, pero escucha y acepta cuando el otro dé una razón clara.

Esta metodología de trabajo se usa mucho en matemáticas: poner a prueba tu modelo para demostrar que está equivocado, llevándolo al límite, en vez de querer convencer a los demás que sí está bien. ¡Inténtalo!

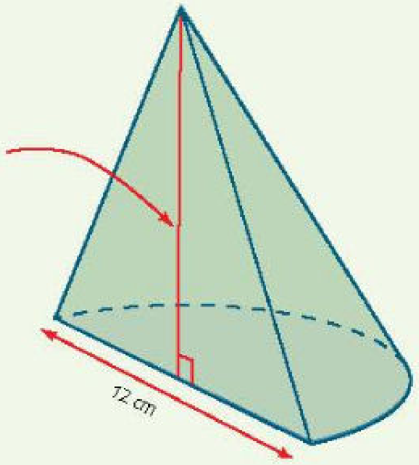
Practica

1. ¿Cuál es la altura de un cono si su diámetro es el doble de la altura y su volumen es de 72π cm^3?
2. ¿Cuáles son las dimensiones de la esfera con mayor volumen que puede caber dentro de un cono circular?
3. ¿Cuáles son las dimensiones del cono con mayor volumen que puede caber en una esfera?
4. Se tiene una media esfera de radio r y un cilindro de radio r y altura $2r$. Si la media esfera se llena con arena, en proporción al volumen total del cilindro:
   - ¿Cuánto volumen ocuparía dentro del cilindro?
5. Calcula el volumen del cono que está a la derecha.



Evalúa tu avance

1. ¿Cuál es el volumen del siguiente semicono si la base tiene un diámetro de 12 cm?:



a. 167 cm^3
b. 1 582.56 cm^3
c. 1 055.04 cm^3
d. 527.52 cm^3

2. En una clase de Geografía los alumnos hicieron el modelo de un volcán de forma cónica con un diámetro de 80 cm. Si el volumen del modelo es de 16755.15 cm^3.
   - ¿Cuál es la altura del volcán?

   a. 10 cm
   b. 9 cm
   c. 12 cm
   d. 11 cm

Proporcionalidad y funciones

Lección 32

Analizarás situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades

Explora

¿Cuántos somos?

El Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática (INEGI) pronostica que en los próximos 10 años, la población de cierta comunidad del estado de Chihuahua se incrementará de acuerdo con la ecuación $P = 5\,000 + 40t + 2t^2$.

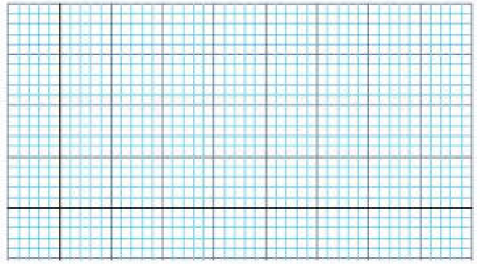
- ¿Cuánta población se espera que aumente en la primera mitad del periodo?
- ¿Cuánta población se espera que se incremente en la segunda mitad del periodo?

▲ Para planear el desarrollo de un país, se requiere conocer cómo crece su población.

Descubre y construye

- **Ahorro constante**

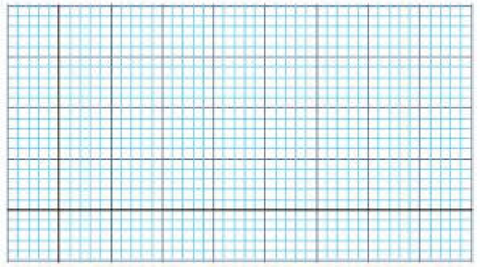
1. Ricardo recibe mensualmente de sus papás 80 pesos para sus gastos. Además, cuatro veces al mes lava el coche de la vecina, quien le paga 50 pesos por cada lavada. Ricardo divide sus gastos mensuales de la siguiente manera: tres décimas partes para transporte, una cuarta parte para comidas fuera de casa, una quinta parte para paseos y la otra cuarta parte para ahorrar:
   - ¿Cuáles son los ingresos mensuales de Ricardo?
   - ¿Cuánto ahorra mensualmente?
   - ¿Cuánto ahorrará al término de un año?
   - ¿Cuánto gastará en un año y medio en comidas?
   - ¿Cuánto gasta Ricardo en ocho meses de transporte?
   - ¿Cuál es la ecuación que modela el ahorro por mes?
     ⇒ Haz su gráfica.



Para tu apunte

Para identificar el tipo de variación, lineal o cuadrática, de las magnitudes involucradas en un problema se puede realizar una tabla de valores.

2. Ahora es tu turno de calcular cuánto podrías ahorrar con base en el dinero que recibes de tus padres. Elabora un plan de ahorro razonable para ti y haz una gráfica que muestre el crecimiento de tu ahorro por mes. Intenta llevarlo a cabo.
   - ¿En cuánto tiempo tendrás más de 500 pesos?
   - ¿En cuánto tiempo tendrás 1000 pesos?



• El lanzamiento

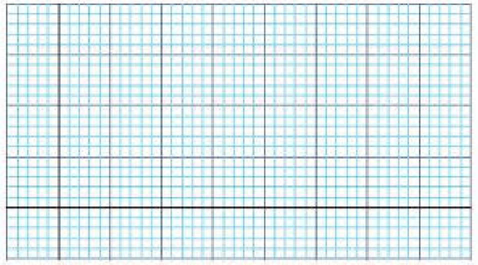
Un jugador de béisbol lanza una pelota hacia arriba con una velocidad inicial de 60 km/h. La altura de la pelota se calcula por segundo con la siguiente fórmula:

$$h = 16t - 4.9t^2$$

▶ En el béisbol, el lanzador o *pitcher*, es el jugador encargado de lanzarle la pelota al bateador.

1. Responde:
   - ¿Cuánto tiempo tarda la pelota en el aire?
   - ¿En qué tiempo la pelota alcanza su altura máxima?
   - ¿Cuál es la altura máxima a la que llega la pelota?

2. Traza la gráfica de la altura de la pelota con respecto al tiempo.



• El parque de diversiones

El parque de diversiones de tu ciudad ofrece dos posibilidades para visitarlo:

a. Te vuelves miembro oficial si pagas 70 pesos por anualidad y 10 pesos cada vez que lo visites.
b. Pagar 15 pesos cada vez que vayas.

Si x es el número de veces que irás al parque de diversiones:

1. Plantea las ecuaciones que modelan el costo de entradas acumulativas de acuerdo con el número de visitas para cada opción.
2. Grafica ambas ecuaciones en un mismo plano.
   - ¿Cuál es la intersección de las gráficas?
   - ¿Cuál de las dos opciones es la mejor si planeas ir al parque de diversiones una vez al mes? Justifica tu respuesta.
   - ¿Cuál de las dos opciones es mejor si planeas ir al parque de diversiones dos veces por mes? Justifica tu respuesta.
   - ¿Cuántas veces tienes que ir al parque para que sea más barato hacerte miembro?

Pongámonos de acuerdo

La empresa Garza fabrica un sacapuntas por 1.20 pesos y vende seis por 30 pesos. La empresa Cordero fabrica un sacapuntas por 1.05 pesos y vende siete a 28 pesos.
Reunidos en parejas realicen las siguientes actividades:

1. Escriban la expresión algebraica que modela los ingresos por venta de sacapuntas de cada empresa.
2. Escriban la expresión algebraica que modela las ganancias por venta de sacapuntas de cada empresa.
3. Elaboren la gráfica de las ganancias para cada empresa por venta de sacapuntas:
   - ¿Qué gráfica tiene mayor pendiente?
   - ¿Qué significa la pendiente en el problema: costo, gasto, ganancia?

⇒Discútanlo en equipo y con su maestro.

Para tu apunte

En ocasiones puede ser complicado plantear las ecuaciones que definen un problema real. Para facilitarte el camino realiza estos pasos y establece las siguientes preguntas:

1. Separa en dos columnas la información y pregúntate: ¿qué datos me dan?, ¿qué me piden que encuentre?
2. Si en la columna de lo que te piden hay dos incógnitas, revisa si en el problema se definen dos situaciones; si es así, se puede plantear con ecuaciones simultáneas.
3. ¿La relación de los datos define un crecimiento en el que un dato se multiplica por un factor constante o por sí mismo? ¿Será una ecuación lineal o cuadrática?
4. Subraya las palabras clave y los verbos de la situación o del problema. Trata de transformar cada uno a una operación. Por ejemplo: ganancia típicamente es una suma, costo es típicamente una resta.
5. Con los datos y los verbos identificados encuentra qué tipo de relación existe entre los datos y tradúcela a una operación.

De vuelta al Explora

1. Con lo que has aprendido en la lección, traza la gráfica para la ecuación $P = 5\,000 + 40t + 2t^2$ y responde.
   - ¿Cuál era la población inicial?
   - ¿Cuántas personas aumentaron en la comunidad al pasar el primer año?
   - ¿Cuántas personas se incrementaron en la comunidad después de cinco años?
   - ¿Cuántas personas aumentaron en la comunidad luego de diez años?

Practica

1. Lucía acostumbra consumir sus pastillas de menta de un frasco completo de la siguiente manera: el primer día se toma la mitad, el segundo día un tercio, el tercer día un doceavo y el cuarto día las últimas cuatro pastillas. ¿Cuántas pastillas tiene en total un frasco?
   ⇒ Plantea la ecuación para resolver el problema.
2. El auto x corre a 120 km/h y otro auto y a 90 km/h. Si ambos salen juntos a velocidad constante, ¿a qué distancia estará x de y después de dos horas?
   ⇒ Plantea la ecuación para resolver el problema.
3. Las ganancias mensuales con respecto a la venta por unidad de relojes en una tienda están dadas por la ecuación $y = 180x - x^2$. ¿Cuál sería la máxima ganancia? y ¿cuántos relojes se tendrían que vender para obtener la máxima ganancia?
   ⇒ Plantea la ecuación para resolver el problema.
4. En uno de los platos de la balanza se ha puesto una pieza de queso y en el otro ¾ del mismo queso y además una pesa de ¾ de kilogramo. Si la balanza está en equilibrio. ¿Cuánto pesa la pieza de queso?
   ⇒ Plantea la ecuación para resolver el problema.

Evalúa tu avance

1. Un tanque con 1000 litros de agua se está vaciando a 25 litros por minuto. ¿Cuántos minutos le llevará vaciarse por completo?
   a. 20
   b. 30
   c. 15
   d. 40
2. La ecuación $y = -x^2 + 12x - 18$ se representa gráficamente por:
   a. Una recta que corta al eje y en 4, y con pendiente -2.
   b. Una parábola con vértice en el origen.
   c. Una parábola con vértice en (6, 18).
   d. Una recta que pasa por $(-2, 6)$ y pendiente 3.

Nociones de probabilidad

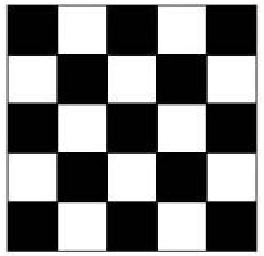
Lección 33

Analizarás las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables

Explora

Tiro al blanco

Héctor y Jaime están jugando a lanzar dardos sobre un tablero cuadriculado como el que se muestra en la figura de abajo. Héctor gana un punto por cada dardo insertado en la parte negra del tablero y Jaime gana un punto por cada dardo insertado en la parte blanca.



- ¿Quién crees que ganará? Justifica tu respuesta.

Descubre y construye

- ¿Quién inicia?

Roberto, Gerardo y Jesús discuten sobre quién debe comenzar a jugar un nuevo videojuego. Después de un rato, acuerdan tomar la decisión al azar, así que lanzan dos monedas al aire. Roberto gana si caen dos águilas; si caen dos soles, Gerardo gana; y si cae un águila y un sol, Jesús gana.

1. Responde:
   - ¿Quién crees que comenzará a jugar el videojuego?
   - ¿Consideras que esta forma de elegir es justa?, ¿por qué?
2. Escribe todos los posibles resultados de las monedas:

Moneda 1	Moneda 2

   - ¿Cuál es la probabilidad de que Roberto comience el juego?
   - ¿Cuál es la probabilidad de que Gerardo lo inicie?
   - ¿Cuál es la probabilidad de que Jesús comience a jugar?
   - ¿Quién tiene más probabilidad de ganar?
   - Entonces, ¿esta forma de elegir es justa?
3. Plantea otra forma de elegir a la persona que comenzará a jugar el videojuego de manera que sea justa, es decir, que los tres tengan la misma oportunidad de ser ganadores.

Para tu apunte

Se dice que un juego al azar es justo si sus resultados son equiprobables, es decir, cuando todos los diferentes resultados tienen la misma probabilidad de ser ganadores. Por ejemplo, al lanzar una moneda, ambas caras tienen la misma oportunidad de salir. Cuando esto no ocurre se dice que los resultados no son equiprobables y por lo tanto, el juego al azar no es justo.

• Serpientes y escaleras

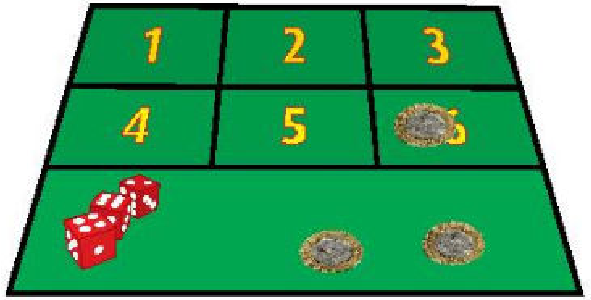
María y Norma juegan a "Serpientes y escaleras", pero en esta ocasión las reglas son avanzar de casilla por casilla de acuerdo con lo que se obtenga en el lanzamiento de un dado: si cae un número primo o uno, María avanza una casilla; de lo contrario, Norma avanza una casilla.

Este antiguo juego es originario de la India y se utilizaba para enseñarles religión a los niños, está trazado en el piso; en México se juega sobre un cartón ilustrado.

1. De acuerdo con lo anterior responde:
   - Del uno al seis, ¿cuáles son números primos?
   - ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar el dado se obtenga un resultado favorable para María?
   - ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar el dado se obtenga un resultado favorable para Norma?
   - ¿Los resultados del lanzamiento del dado son equiprobables?
   - ¿De qué forma harías que los resultados sean equiprobables?

• Los casinos

Nora juega "Chuck a luck" en un casino. Este juego consiste en que el jugador escoge un número del uno al seis, apuesta 10 pesos y lanza tres dados. Al tirarlos, si no sale tu número en ningún dado pierdes los 10 pesos. Si sale el número en alguno(s) de los dados, te devuelven los 10 pesos y ganas los 10 pesos multiplicados por el número de veces que salió tu número. Es decir, si sale en dos dados tu número, te devuelven los 10 pesos y ganas 20.



1. Una vez que conoces las reglas de "Chuck a luck", responde:
   - Consideras que este juego es justo para Nora, ¿por qué?
   - Si juegas muchas veces, ¿qué es más probable que ocurra?
   - ¿Cuál es el total de resultados posibles para el juego en cada tirada?
   - ¿Cuál es la probabilidad de que al jugar Nora, le devuelvan la apuesta y gane 30 pesos?
   - ¿Qué condición propondrías en este juego para que Nora tuviera las mismas posibilidades de ganar o perder?
2. En los casinos todos los juegos de azar puros son desfavorables. Investiga algunos juegos que hay en los casinos y discute con tus compañeros por qué algún juego en específico no es justo en términos probabilísticos.

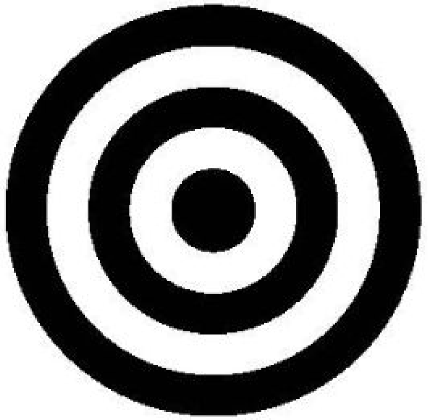
Pongámonos de acuerdo

Junto con un compañero identifiquen de los siguientes juegos planteados en cuáles los resultados son equiprobables y en cuáles no:

1. Al lanzar un dado, Francisco gana si se obtiene un número par, mientras que Ricardo lo hace si es impar.
2. Al lanzar un dado, Francisco gana si se obtiene un número mayor a dos, mientras que Ricardo lo hace si es menor o igual a dos.
3. De una baraja inglesa, Luis gana si saca una carta roja; si es negra entonces Jorge gana.

4. Ganar el premio mayor al girar una ruleta de la suerte de 10 secciones: 1 verde (premio mayor), 2 rojas, 3 azules y 4 amarillas.

5. Acertar en el área blanca o negra al tirar un dardo en un tablero como el que se muestra:



De vuelta al Explora

De acuerdo con el problema de la sección EXPLORA, contesta lo siguiente:

- ¿Crees que las reglas para ganar los puntos sean justas? ¿Por qué?
- ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar Héctor un dardo, gane un punto?
- ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar Jaime un dardo, gane un punto?
- ¿Las probabilidades para Héctor y Jaime son las mismas?
- ¿Los posibles resultados al lanzar un dardo al tablero son equiprobables?
- ¿Qué arreglo podrías hacer para que este juego sea justo?

Practica

1. En un juego de azar se tiran dos dados y se apuesta por el número resultante de la suma de los dados.
   - ¿Cuántos posibles resultados se pueden tener?
   - ¿Apostarías por cualquier suma de las posibles en el juego?, ¿por qué?
   - ¿Se tiene la misma probabilidad para cualquier suma?
   - ¿Qué suma tiene más probabilidad de salir?
   - ¿Qué suma tiene menos probabilidad de ocurrir?
   - ¿Los resultados de este juego son equiprobables?

2. Discute con tus compañeros si una rifa de cinco personas en donde gana aquella que su número es sacado en tercer lugar es un juego equiprobable. Da tus justificaciones.

3. Plantea tres juegos de azar en los que sepas si son o no equiprobables. Intercámbialos con los de otro compañero e identifiquen cuáles son equiprobables y cuáles no; luego comparen sus resultados.

4. Si dos personas juegan a "Piedra, papel o tijera" (en algunos lugares le llaman *chin-chan-pu*).
   - ¿Es un juego equiprobable o no?
   - ¿Qué factores hacen que sí lo sea o que no lo sea?

   ⇒ Discutan sus conclusiones en grupo junto con su maestro.

5. Visita la siguiente página http://bibliotecadigital.ilce.edu.mx/sites/telesecundaria/tsm01g01v02/u03t04s01.html, y junto con tu maestro y compañeros organícense para llevar a cabo esta actividad.

Evalúa tu avance

1. Erika, Patricia, Ana y Mónica quieren rifarse el último pastelillo. Para ello han propuesto las siguientes formas de hacerlo. ¿Cuál de éstas haría que tener el último pastelillo sea equiprobable?
   a. Tirar un dado, si cae un múltiplo de dos, gana Erika; si cae un uno, gana Patricia; si cae un cinco, gana Ana; y si cae múltiplo de tres, gana Mónica.
   b. De una baraja inglesa cada una escoge una de las cuatro figuras. Revuelven las cartas y sacan una carta, gana quien escogió la figura de esa carta.
   c. Erika anota su nombre en una tarjeta, Patricia el suyo en dos tarjetas, Ana en tres tarjetas y Mónica en cuatro tarjetas. Colocan todas las tarjetas en una urna y la primera que salga gana.
   d. La primera que vea pasar un auto color rojo, gana.

2. Óscar e Ignacio juegan a las adivinanzas. Óscar lanza una moneda y dice que caerá águila; Ignacio lanza un dado y dice que caerá un tres. ¿Quién de ellos es más probable que gane?, ¿por qué?
   a. Ignacio, porque tiene más opciones para elegir.
   b. Ambos podrían hacerlo, porque tienen la misma probabilidad.
   c. Óscar, porque su probabilidad es mayor que la de Ignacio.
   d. Tienen la misma probabilidad de ganar pero lo hará Óscar porque es mejor.

Evaluemos lo aprendido

✓ Evaluación tipo Planea

Subraya la opción que consideres correcta y, al terminar, con la guía del profesor, revisa en grupo tus respuestas.

1. María y Julia se encuentran en ciudades diferentes, las cuales están separadas una distancia de 600 km. Si ambas viajan para reunirse y María viaja a 150 km/h en promedio en su auto y Julia lo hace a 90 km/h en promedio en autobús, ¿cuál de las siguientes ecuaciones sirve para hallar el tiempo que tardarán en encontrarse?
   - a. $150t = 600 - 90t$
   - b. $150t - 90t = 600$
   - c. $150t + 600 = 90t$
   - d. $150t = 90t$

2. Respecto al problema anterior, ¿qué distancia recorrió cada una?
   - a. María recorrió 300 km y Julia 300 km.
   - b. María recorrió 400 km y Julia 200 km.
   - c. María recorrió 250 km y Julia 350 km.
   - d. María recorrió 375 km y Julia 225 km.

3. La mesa de la casa de Brenda tiene forma geométrica de un cono truncado. Si la superficie lateral de la figura se extendiera hacia abajo hasta formar el cono completo, ¿qué altura alcanzaría si el alto de la mesa es de 50 cm, el diámetro del círculo superior es de 80 cm y el del inferior 60 cm?
   - a. 1 m
   - b. 1.50 m
   - c. 5 m
   - d. 2 m

▲ Muchas piezas de mobiliario tienen formas geométricas.

4. Del problema anterior, calcula el volumen de la mesa:
   - a. $\frac{185\,000\pi}{3}$ cm^3
   - b. $\frac{700\pi}{3}$ cm^3
   - c. $\frac{500\pi}{3}$ cm^3
   - d. $\frac{150\,000\pi}{3}$ cm^3

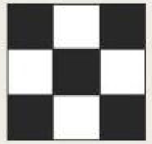
5. Un tanque cilíndrico tiene una altura de un metro y se sabe que cuando está completamente lleno de agua tiene un volumen de $62\,500\pi$ cm^3. ¿Cuál será la relación entre el radio del cilindro y su altura?
   - a. El radio mide la mitad de la altura.
   - b. El radio mide la cuarta parte de la altura.
   - c. El radio mide lo mismo que la altura.
   - d. El radio mide el doble de la altura.

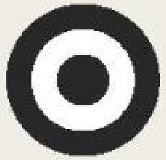
6. A Carlos le preguntan acerca de las etapas de su vida. Como es un matemático muy simpático responde: el primer doceavo de mi vida estuve con mi mamá, los siguientes cinco doceavos de mi vida los dediqué a estudiar mi educación básica y bachillerato, luego estudié mi carrera en un noveno de mi vida, después hice mi especialización en un dieciochoavo de mi vida. Posteriormente trabajé durante un cuarto de mi vida en el extranjero, y en los últimos tres años que he vivido hasta hoy, regresé a México y formé una familia. ¿Qué ecuación usarías para calcular la edad que tiene Carlos?
   - a. $\frac{x}{12} + \frac{5x}{12} - \frac{x}{9} + \frac{x}{18} - \frac{x}{4} + 3 - x = 0$
   - b. $\frac{x}{12} + \frac{5x}{12} + \frac{x}{9} + \frac{x}{18} + \frac{x}{4} + 3 - x = x$
   - c. $x = \frac{x}{12} + \frac{5x}{12} + \frac{x}{9} + \frac{x}{18} + \frac{x}{4} + 3$
   - d. $\frac{x}{12} = 4$

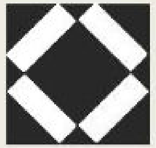
7. La ecuación $y = 1000x - x^2$ representa las ganancias, en pesos, obtenidas por una empresa de cosméticos de acuerdo con el número de artículos vendidos x. ¿Cuál es la cantidad de artículos que tendría que vender para obtener las ganancias máximas y cuáles serían éstas?

a. 500 artículos y las ganancias serían de \$500 000.
b. 100 artículos y las ganancias serían de \$250 000.
c. 100 artículos y las ganancias serían de \$90 000.
d. 500 artículos y las ganancias serían de \$250 000.

8. Sebastián fue a la feria del pueblo e intenta probar su puntería en el puesto donde se juega "tiro al blanco" con dardos. El responsable del puesto le da a elegir el tablero en donde lanzará sus dardos y le dice que ganará si le atina a la sección blanca. ¿Cuál de los siguientes tableros le recomendarías elegir a Sebastián?


I


II


III


IV

a. Cualquiera de los cuatro. Todos son equiprobables.
b. El II y IV, pues hay más probabilidad de atinarle al blanco.
c. El IV, en los otros la probabilidad de ganar es menor.
d. El I, pues la probabilidad de ganar en éste es mayor que en los demás.

9. De los tableros anteriores, ¿cuál es (son) equiprobable(s)?, es decir, que Sebastián tenga la misma probabilidad de atinarle a la parte blanca que a la negra.
a. Todos son equiprobables.
b. Solo el IV.
c. Solo el I.
d. El I y el III.

✓ Evaluación tipo PISA

Charles Babbage y la primera computadora de la historia

Charles Babbage fue un brillante matemático británico y científico de la computación quien diseñó y parcialmente implementó una máquina de diferencias mecánicas para calcular tablas de números. También diseñó, mas nunca construyó, la máquina analítica para ejecutar programas de tabulación o computación; por estos inventos se le considera como una de las primeras personas en concebir la idea de lo que hoy llamaríamos una computadora, de ahí que se le considere "El padre de la computación".

Hacia 1812 y con 21 años de edad, se planteó un muy ambicioso proyecto: encontrar un método por el cual una máquina pudiera hacer cálculos automáticamente, eliminando así los errores debidos a la fatiga o aburrimiento que padecían todas aquellas personas encargadas de compilar (es decir, traducir al lenguaje computacional) las tablas matemáticas.

Su motivación para intentar tal empresa pareció provenir de tres diversos factores: su aberración al desorden, su conocimiento de las tablas logarítmicas y los trabajos sobre máquinas calculadoras realizadas por el francés Blaise Pascal y el alemán Gottfried Leibniz. Ya en 1822, en una carta dirigida a sir Humphry Davy sobre la aplicación de maquinaria al cálculo e impresión de tablas matemáticas, discutía los principios de una máquina calculadora. Actualmente, en el Museo de Ciencias de Londres se exhiben partes de sus mecanismos inconclusos; además, parte de su cerebro conservado en formol se exhibe en The Royal College of Surgeons of England, también en Londres.

1. Charles Babbage fue un gran científico protoinformático, precursor de la actual computadora. En 1822, presentó ante la Royal Astronomical Society un modelo al cual llamó "máquina diferencial". Su propósito era tabular polinomios usando un método numérico llamado el "método de las diferencias".
   ⇒ Investiga acerca de la vida y obra de Charles Babbage y explica, a detalle, cuáles eran las características diseñadas por Babbage para la máquina diferencial y en qué consiste el método de las diferencias.

▶ La carrera de Babbage como inventor fue muy prolífica. Publicó alrededor de 80 libros y artículos que van desde las matemáticas, hasta la teología, astronomía y política.

▲ Máquina Analítica de Charles Babbage. Más que una calculadora elegante para la época, como se puede apreciar en el Science Museum de Londres.

2. Entre 1833 y 1842, y tras dejar inconclusa la construcción de la máquina diferencial, Babbage probó algunas variantes. Intentó construir una máquina que fuese programable para hacer cualquier tipo de cálculo, no sólo los referentes al cálculo de tablas logarítmicas o funciones polinómicas. Ésta sería la "máquina analítica", cuyo diseño se basaba en el telar de Joseph Marie Jacquard, el cual usaba tarjetas perforadas para determinar cómo una costura debía realizarse, pero adaptada para conseguir calcular funciones analíticas, por lo que se le considera la primera computadora del mundo. El diseño inicial plenamente funcional de ella la finalizó en 1835, sin embargo, Charles nunca terminó la máquina.

- Investiga cuáles son las características y generalidades de esta máquina analítica diseñada por Babbage.

▲ Ada Lovelace fue una extraordinaria matemática del siglo XIX, capaz de idear algoritmos para máquinas electrónicas antes, incluso, de que existiese la electricidad.

3. Augusta Ada King, mejor conocida como Lady Ada Lovelace, matemática británica e hija del reconocido poeta Lord Byron, se enteró de los esfuerzos de Babbage y se interesó en su máquina, la promovió activamente y escribió varios programas para ella, además de deducir y prever la capacidad de los ordenadores para ir más allá de los simples cálculos de números. Los diferentes historiadores concuerdan en que esas instrucciones hacen de Ada Lovelace la primera programadora de computadoras de la historia. En 1979 el Departamento de Defensa de los Estados Unidos creó un lenguaje de programación basado en Pascal nombrado Lenguaje de Programación Ada, en su honor.

⇒ Investiga acerca de la vida y obra de esta gran matemática quien se consideraba a sí misma "una analista", concepto bastante moderno para su época.

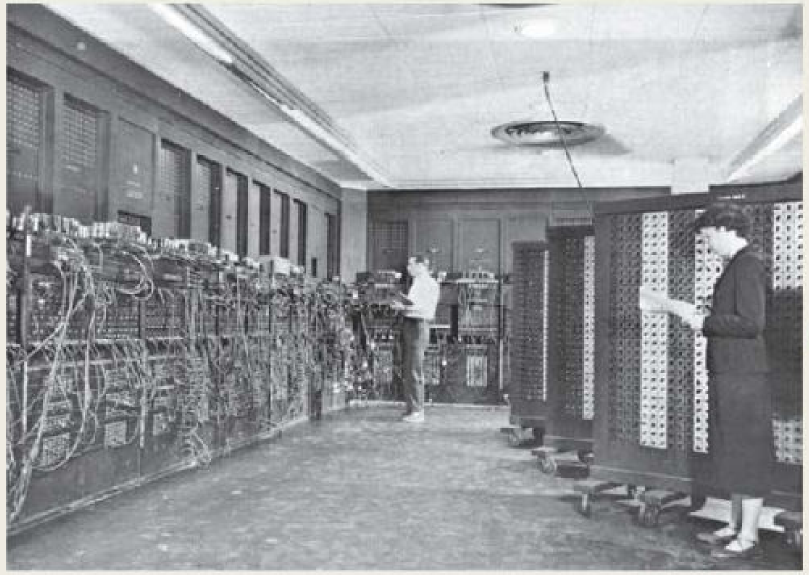
⇒ También investiga qué es:

- Un algoritmo
- Un programa de computación
- Un lenguaje de programación

4. ENIAC es el acrónimo de Electronic Numerical Integrator and Computer (Computador e Integrador Numérico Electrónico) utilizado por el Laboratorio de Investigación Balística del Ejército de los Estados Unidos. Se le ha considerado a menudo la primera computadora de propósito general (en realidad este título pertenece a la computadora alemana Z3). Era totalmente digital, es decir, que ejecutaba sus procesos y operaciones mediante instrucciones en lenguaje de máquina, a diferencia de otras máquinas computadoras contemporáneas cuyos procesos eran analógicos. Fue presentada en público el 15 de febrero de 1946 y desactivada definitivamente el 2 de octubre de 1955.

⇒ Investiga sobre ENIAC:

- ¿Qué características generales tenía?
- ¿En qué condiciones debía trabajar para asegurar un óptimo desempeño?
- ¿Cuál era su capacidad de cómputo?
- ¿Cuáles eran sus principales objetivos de uso?



◄ Varias mujeres programadoras hicieron posible que el funcionamiento de la ENIAC fuera sencillo y accesible. Además, ellas crearon las primeras aplicaciones de software sentando las bases para al evolución de la programación en las siguientes décadas.

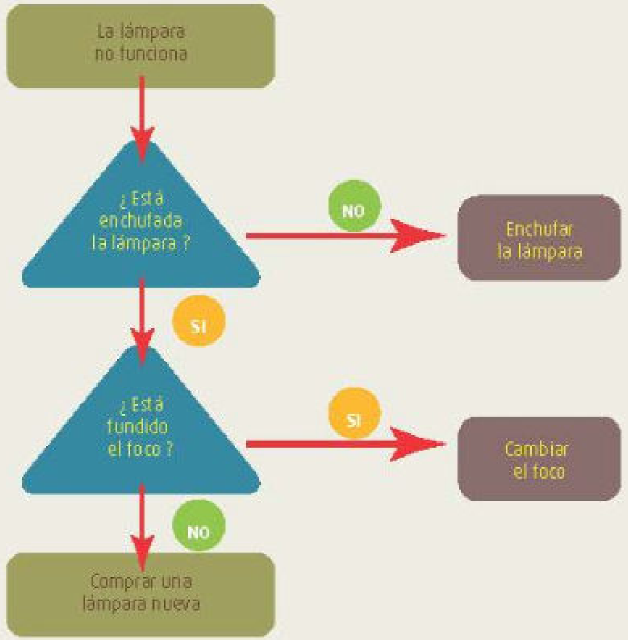
5. Al ahondar en el tema de la programación y la computación, podemos concebir un algoritmo como una serie de instrucciones que nos permiten resolver o terminar un trabajo.

⇒ En ese tenor, reflexiona y argumenta si una receta de cocina puede ser o no un algoritmo.

⇒ Propón, además, un algoritmo que permita resolver un problema o con el cual se pueda realizar una tarea específica.

⇒ Describe ampliamente tus respuestas.

6. Algo más sobre el tema: el diagrama de flujo o diagrama de actividades es la representación gráfica de un algoritmo o proceso. Se utiliza en disciplinas tan variadas como la programación, la economía, los procesos industriales y la psicología cognitiva. Estos diagramas utilizan símbolos con significados definidos que representan los pasos del algoritmo, y su flujo de ejecución está determinado por flechas, las cuales conectan los puntos de inicio y de fin del proceso. En un principio, los diagramas de flujo resultaron un medio popular para describir algoritmos de computadora y aún hoy sirven a este fin. Sin embargo, en la década de 1970, la popularidad de los diagramas de flujo como método propio de la informática disminuyó gracias al nuevo hardware y a los nuevos lenguajes de programación de tercera generación, sin embargo se convirtieron en instrumentos comunes en el mundo empresarial porque describen fácilmente la ejecución de procesos y procedimientos. A continuación, se presenta un ejemplo de un diagrama de flujo sencillo:



⇒ Investiga cuáles son los pasos a seguir para construir un diagrama de flujo.
- ¿Cuál es el significado de la siguiente simbología básica de un diagrama de flujo?: elipse, rectángulo, rombo, círculo, triángulo con punta hacia abajo y con punta hacia arriba.

⇒ Con base en la simbología recién investigada y a partir del algoritmo que elaboraste en la pregunta anterior, construye un modelo sencillo de diagrama de flujo que lo represente.

Hacia 1991, a más de 150 años de las ideas y planos de Charles Babbage, y gracias a una labor minuciosa del Museo de Ciencias de Londres, se construyó la máquina analítica; para ello los investigadores se basaron únicamente en el diseño y dibujos del británico, y utilizaron las técnicas disponibles en aquella época. La máquina funcionó sin problemas. Charles Babbage también puede ser considerado el padre de las impresoras modernas. Sus planos incluían un componente de impresión, el cual ha sido reconstruido por el mismo museo y es funcional. Esta impresora consta de 8 000 piezas mecánicas y pesa aproximadamente 2.5 toneladas; además, es capaz de imprimir automáticamente los resultados de un cálculo y un usuario puede cambiar parámetros como espacio entre líneas, elegir entre dos tipografías, número de columnas, etc. Su sofisticación llega a tal grado que puede generar los moldes de las impresiones que podrían ser usados por las imprentas aún hoy en día. Por todo esto, podemos reconocer en Babbage a un hombre visionario. Este matemático y científico de la computación británico expresó en su autobiografía: "Tan pronto como exista una máquina analítica, será necesario redirigir el futuro curso de la ciencia".

El envase adecuado

Mi hermano tiene un puesto administrativo en la oficina donde trabaja. En cierta ocasión tenía que decidir el tipo de envase que debería mandarse a fabricar para servir agua con el fin de mitigar la sed en la oficina. Con la finalidad de abatir costos para su elaboración el envase debía contener el mayor volumen posible y utilizar la menor cantidad de material que fuera factible. Los fabricantes le presentaron a mi hermano varias opciones con forma cónica, cilíndrica y de prisma cuadrangular.

1. Si el envase cónico permite contener 100 ml de agua y tiene una altura de 8 cm, ¿cuál sería la medida del radio de su base?

2. Si el cilindro tuviera el mismo radio, pero captara el doble del volumen que el cono anteriormente mencionado, ¿cuál debería ser la medida de su altura?

3. Supongamos que el cilindro y el prisma cuadrangular encierran el mismo volumen y tienen la misma altura; las dimensiones del cilindro son 3.5 cm de radio y altura de 7 cm, mientras que la base del prisma mide 6.2 cm de lado.

   ⇒ Calcula la cantidad de material necesario para construir cada cuerpo.

   ⇒ Para guiarte, realiza el desarrollo plano de cada uno (caras laterales y tapas).

4. Con base en los datos anteriores, ¿cuál sería mejor opción de envase: el cilindro o el prisma cuadrangular? Justifica tu respuesta.

Apéndice

BLOQUE 1

Constante de proporcionalidad. Magnitud que describe el aumento de cantidades iguales de una magnitud y con respecto al aumento unitario de otra magnitud x, en una relación del tipo $y = kx$.

Ecuación de segundo grado. Es aquella donde la variable se encuentra elevada, a lo más, a la segunda potencia. Este tipo de ecuaciones tiene la forma $ax^2 + bx + c = 0$ donde a no puede ser igual a cero.

Eventos complementarios. Se presentan cuando la unión de dos o más eventos es igual al espacio muestral.

Figuras congruentes. Son aquellas que tienen la misma forma e igual tamaño. Estas figuras tienen ángulos iguales y lados iguales.

Figuras semejantes. Son aquellas que tienen la misma forma pero tamaño diferente. Estas figuras tienen ángulos iguales y sus lados proporcionales.

Población de una encuesta. Es una muestra representativa de personas a las que se les realizan preguntas para averiguar estados de opinión, características o hechos específicos.

Probabilidad. Es el grado de certeza de que ocurra un evento, y se calcula, para un evento simple, por medio de la razón de los casos favorables entre el total de casos.

Relaciones de probabilidad directa. Están representadas algebraicamente por la ecuación $y = kx$, donde y representa la variable dependiente, x la variable independiente, y k la constante de proporcionalidad. Se representan gráficamente por una línea recta que pasa por el origen.

Relaciones afines. Son las relaciones del tipo $y = ax + b$, con b distinto de cero. A diferencia de las relaciones de proporcionalidad éstas no pasan por el origen.

Relaciones de variación cuadrática. Son funciones polinómicas de segundo grado. Su forma general es $y = ax^2 + bc + c$, con $a \neq 0$.

Segmento de recta. Es la porción de una recta que está delimitada por dos puntos.

Triángulos congruentes. Triángulos idénticos con el mismo tamaño y la misma forma.

Triángulos semejantes. Dos triángulos que tienen la misma forma, pero no el mismo tamaño. Cuando dos triángulos son semejantes, los ángulos correspondientes son congruentes y los lados correspondientes son proporcionales en medida.

BLOQUE 2

Cateto. Cualquiera de los dos lados que forman el ángulo recto en un triángulo rectángulo.

Cateto adyacente. Es aquel que forma parte del ángulo al cual se hace referencia.

Cateto opuesto. Es el lado que no forma parte del ángulo que se toma como referencia y se encuentra enfrente de éste.

Eje de simetría. Es una línea imaginaria que sirve de referencia para relacionar los puntos de una figura con los puntos de otra, de manera que las distancias (perpendiculares) desde este eje a los puntos de la figura original y a los puntos homólogos de la figura simétrica sean iguales.

Evento mutuamente excluyentes. Dos o más eventos son mutuamente excluyentes si no pueden ocurrir de manera simultánea. Es decir, la ocurrencia de un evento impide automáticamente la ocurrencia del otro evento o eventos.

Hipotenusa. Es el lado opuesto al ángulo recto de un triángulo rectángulo.

Rotación. Significa girar alrededor de un centro.

Simetría central. Es cuando todas las partes tienen una parte correspondiente que está a la misma distancia del punto central pero en la dirección opuesta.

Teorema de Pitágoras. En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados.

Traslación. Es un movimiento sin un cambio de orientación. La figura sigue viéndose exactamente igual, sólo que en un lugar diferente.

Triángulo rectángulo. Es un triángulo con un ángulo recto.

Vector. Es una herramienta que nos dice el sentido, la magnitud y la dirección con la que se desplazan los objetos.

BLOQUE 3

Constante de proporción. El cociente de las fracciones de una proporción se llama constante de proporcionalidad o razón de la proporción.

Escala. Proporción de la longitud en un dibujo o modelo de la longitud real.

Eventos independientes. Se dice que un evento A es independiente de un evento B, si la probabilidad de que A suceda no está influenciada porque B haya o no sucedido.

Eventos sucesivos. Son aquellos en los que el resultado del evento presente no se ve influenciado por el resultado del anterior.

Fórmula general. La fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado es: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, donde a, b, c son los coeficientes de la ecuación cuadrática: $ax^2 + bx + c = 0$.

Gráfica. Representación de datos numéricos por medio de coordenadas o dibujos que hacen visible la relación o gradación que esos datos guardan entre sí.

Gráfica de la función cuadrática. Se representa por una curva llamada parábola cuya característica particular es que presenta un valor máximo o mínimo.

Homotecia. Es una trasformación geométrica que, a partir de un punto fijo, multiplica todas las distancias por un mismo factor.

Magnitud. Es todo aquello que se puede medir y que se puede representar por un número.

Probabilidad. La probabilidad de un suceso es un número, comprendido entre 0 y 1, que indica las posibilidades que tiene de verificarse cuando se realiza un experimento aleatorio.

Proporción. Es la igualdad entre dos razones.

Razón. Es la relación entre dos números definida como el cociente de un número por el otro. Puede expresarse como fracción, decimal o porcentaje.

Semejanza. Dos figuras son semejantes sí, y sólo sí, tienen la misma forma pero no el mismo tamaño.

Teorema de Tales. Si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtienen dos triángulos semejantes.

Trisecar. Cortar un objeto en tres partes iguales. Por ejemplo, trisecar un segmento de línea significa cortarlo en tres segmentos de línea iguales. Trisecar un ángulo significa dividirlo en tres ángulos iguales.

BLOQUE 4

Ángulo de elevación. Es el que se mide desde la horizontal hacia arriba.

Ángulo de depresión. Es el que se mide desde la horizontal hacia abajo.

Arco coseno. Es la función inversa del coseno.

Arco tangente. Es la función inversa de la tangente.

Coseno. En un triángulo, es la razón entre el cateto contiguo al ángulo y la hipotenusa.

Desviación media. Es la media aritmética de los valores absolutos de las desviaciones respecto a la media.

Dispersión. Las medidas de dispersión nos informan sobre cuánto se alejan del centro los valores de la distribución.

Eje de revolución. Recta alrededor de la cual gira un cuerpo geométrico.

Función lineal. Es un polinomio de primer grado.

Generatriz. Es la línea exterior de una superficie que al girar alrededor de un eje da lugar a un cuerpo de revolución como el cilindro o el cono.

Media aritmética. Es el promedio de un conjunto de datos. Usualmente se representa con la letra x.

Pendiente. Es la inclinación de la recta con respecto al eje de abscisas.

Rango. Es la diferencia entre el mayor y el menor de los datos de una distribución estadística.

Razón de cambio. Es la tasa de variación de una magnitud con respecto a otra.

Seno. En un triángulo rectángulo, es la razón entre el cateto opuesto al ángulo y la hipotenusa.

Sucesión. Conjunto de objetos o eventos dispuestos en orden consecutivo. En una sucesión aritmética, la diferencia entre dos elementos consecutivos es una constante.

Sólido de revolución. Figura sólida que se forma al girar una figura plana alrededor de un eje fijo.

Tangente. En un triángulo rectángulo, es la razón entre el cateto opuesto al ángulo y el cateto contiguo al ángulo.

BLOQUE 5

Cilindro. Es un cuerpo geométrico engendrado por un rectángulo que gira alrededor de uno de sus lados.

Círculo. Es la figura plana comprendida en el interior de una circunferencia.

Cono. Es el cuerpo de revolución obtenido al hacer girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos.

Equiprobabilidad. Es cuando todos los diferentes resultados tienen la misma probabilidad.

Secciones cónicas. Se denomina sección cónica a la curva intersección de un cono con un plano que no pasa por su vértice. Las secciones cónicas son la elipse, la circunferencia, la parábola y la hipérbola.

Evalúa tu avance

B1 L1

1. Respuesta: b. $x^2 + x = 12$
2. Respuesta: b. 8

B1 L2

1. Respuesta: a. Sí son semejante pero no siempre congruentes.
2. Respuesta: b. Es un error de notación puesto que están nombrados los vértices en sentido contrario.

B1 L3

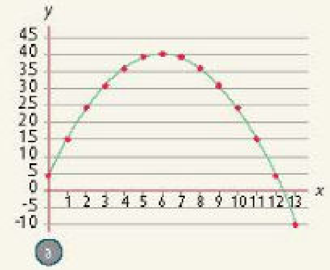
1. Respuesta: a. 16 m^2
2. Respuesta: d. 125°

B1 L4

1. Respuesta: d. 8 000 m.
2. Respuesta: d. Su representación gráfica es una recta que pasa por el origen.

B1 L5

1. Respuesta: d. $y = x^2 + x + 3$
2. Respuesta: a.



B1 L6

1. Respuesta: b. 12 niños y 24 niñas.
2. Respuesta: b. Complementarios.

B1 L7

1. Respuesta: d. Al menos el 65% de los estudiantes de la secundaria de San Jerónimo de Amanalco.
2. Respuesta: c. Uno de los dos ejes tiene que mostrar los nombres del tema representado.

B2 L8

1. Respuesta: b. $x^2 + 5x - 36 = 0$
2. Respuesta: c. $2x^2 = x^2 + 7x$

B2 L9

1. Respuesta: c.

2. Respuesta: b. (−2,0) (−1,−3) (1,−2)

B2 L10

1. Respuesta: c. Rotar a 180° la figura con respecto al mismo punto.
2. Respuesta: a. Las figuras principales están rotadas 120° respecto al centro del círculo.

B2 L11

1. Respuesta: d. $a^2 + b^2$
2. Respuesta: c. 11.18 cm

B2 L12

1. Respuesta: c. $\sqrt{4a^2 - 25b^6}$
2. Respuesta: b.

B2 L13

1. Respuesta: c. $\frac{2}{3}$
2. Respuesta: d. $\frac{11}{21}$

B3 L14

1. Respuesta: c. Ninguna solución.
2. Respuesta: a. 400

B3 L15

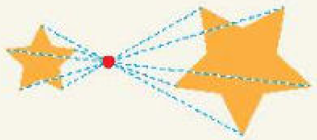
1. Respuesta: b. 3.4 m
2. Respuesta: a. 20 cm y 25 cm

B3 L16

1. Respuesta: c. 3
2. Respuesta: a.

B3 L17

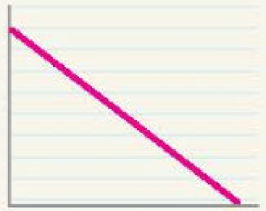
1. Respuesta: a.



2. Respuesta: d. $k = 1/3$

B3 L18

1. Respuesta: a.



2. Respuesta: c. La temperatura disminuyó durante los primeros 60 minutos.

B3 L19

1. Respuesta: b.

2. Respuesta: b. 0 a 10 y de 16 a 31 minutos.

B3 L20

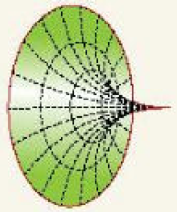
1. Respuesta: d. $\frac{1}{16}$
2. Respuesta: b. $\frac{2}{52}$

B4 L21

1. Respuesta: c. 2, 6, 18, 54, 162, ...
2. Respuesta: b. 10 500

B4 L22

1. Respuesta: b. 216°
2. Respuesta: a.



B4 L23

1. Respuesta: d. 35°
2. Respuesta: c. 73.4° aprox.

B4 L24

1. Respuesta: d. 36.86°
2. Respuesta: c. 32.7 m

B4 L25

1. Respuesta: b. 3.98
2. Respuesta: c. 0.41

B4 L26

1. Respuesta: d. El aumento de costo de 5 a 25 refrescos es de 250 pesos.
2. Respuesta: b. 50 metros/minutos.

B4 L27

1. Respuesta: c. 1.15
2. Respuesta: d. 88

B5 L28

1. Respuesta: b. Largo = 10, ancho = 5
2. Respuesta: c. $x = 8$; $y = -3$

B5 L29

1. Respuesta: c. 22.5 π
2. Respuesta: c. Elipse

B5 L30

1. Respuesta: b. 16.75 m^3
2. Respuesta: d. 946.95 g

B5 L31

1. Respuesta: d. 263.89 cm^3
2. Respuesta: a. 10 cm

B5 L32

1. Respuesta: d. 40 minutos
2. Respuesta: c. Una parábola con vértice en (6, 18).

B5 L33

1. Respuesta: b. De una baraja inglesa cada una escoge una de las cuatro figuras. Revuelven las cartas y sacan una carta, gana quien escogió la figura de esa carta.
2. Respuesta: c. Óscar, porque su probabilidad es mayor que la de Ignacio.

Bibliografía

Recomendada para los estudiantes

Aguilar Márquez, Arturo, *et al.*, *Matemáticas simplificadas*, México, Conamat, Pearson Educación, 2009.

Crump, Thomas, *La antropología de los números*, España, Alianza Educativa, 1994.

Courant, Richard y Herbert Robbins, *¿Qué son las matemáticas?*, México, Fondo de Cultura Económica, 1941.

Kaplan, Robert, *Una historia natural del cero, La nada que existe*, España, Océano, 1999.

Recomendada para los maestros

Alaiga, Humberto, Ana Bressan y Patricia Sadovsky, *Reflexiones teóricas para la educación matemática*. Buenos Aires, Libros del Zorzal, 2005 (Formación Docente Matemática).

Alsina i Pastells, Ángel, "El aprendizaje reflexivo en la formación inicial del profesorado: un modelo para aprender a enseñar matemáticas", *Educación matemática*, Santillana, México, abril 2010, vol. 22, núm. 1, pp. 149-166.

Gómez, Pedro (ed.), Michele Artigue, Régine Douady y Luis Moreno, *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Bogotá, Grupo Editorial Iberoamérica, 1995.

Bosch, Mariana y Josep Gascón, "La praxeología local como unidad de análisis de los procesos didácticos", *Boletín del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*, Madrid, 2004.

Espinoza, Lorena, Mariana Bosch y Josep Gascón Pérez, "El profesor como director de procesos de estudio: análisis de organizaciones didácticas espontáneas", *Recherches en didactique des mathématiques*, 23(1), 79-135, 2003.

Brousseau, Guy. *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*, Buenos Aires, Libros del Zorzal, 2007.

Chevallard, Yves, Mariana Bosch y Josep Gascón. *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*, México, SEP, 1998 (Biblioteca para la actualización el Maestro de la Secretaría de Educación Pública).

Gascón Pérez, Josep. "Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica", *Recherches en didactique des mathématiques*, 1998, 18 (1), 7-34.

Gascón Pérez, Josep, "El papel de la Resolución de Problemas en la Enseñanza de las Matemáticas", *Suma, Revista para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, España, 1994, 6(3), 37-51.

Gascón Pérez, Josep, "Cambios en el contrato didáctico: el paso de estudiar matemáticas en Secundaria a estudiar matemáticas en la Universidad", *Suma, Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, España, 1997, 26, 11-21.

Gascón Pérez, Josep, "El aprendizaje de la Resolución de Problemas de Planteo Algebraico", *Enseñanza de las Ciencias*, España, 1985, 3(1), 18-27.

Ramírez, Margarita y David Block, "La razón y la fracción: un vínculo difícil en las matemáticas escolares", *Educación Matemática*, Santillana, México, abril 2009, vol. 21 (1), pp. 63-90.

Ruiz Munzón, Noemí, Mariana Bosch y Josep Gascón, "La algebrización de los programas de cálculo aritmético y la introducción del álgebra en secundaria", *Investigación en Educación Matemática XIV*, Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, España, 2010, pp. 545-556.

Sadovsky, Patricia, *Enseñar matemáticas hoy. Miradas, sentidos y desafíos*, Buenos Aires, Libros del Zorzal, 2005 (Formación Docente-Matemática).

Referencias de internet

Recomendaciones para navegar en la red

1. No te quedes en la primera referencia a la que te remite el buscador.
2. Busca páginas que contengan citas de libros especializados.
3. Busca páginas de instituciones educativas (universidades) pues éstas suelen ser permanentes y confiables.
4. Wikipedia es un buen comienzo pero no te debes quedar ahí. Conviene que revises las referencia, la bibliografía y los enlaces externos que están relacionados con la página de Wikipedia que consultaste y, además, no pierdas de vista que mucha de la información a la que remite puede ser muy técnica.
5. Wikipedia sirve para contrastar la información que se representa en otras páginas. Normalmente es confiable, pero también insuficiente.
6. Los blogs en internet suelen caducar (no son permanentes) y por ello mucha información valiosa puede dejar de estar disponible.
7. Merece hacer el esfuerzo de establecer contacto vía correo electrónico con el autor de una página que te resulte interesante.
8. La calidad de una investigación aumenta conforme se incrementa la cantidad y calidad de sus fuentes.
9. En Ciencia y Matemáticas las páginas en inglés suelen estar más completas y contener información más actualizada.
10. Los textos que no encuentres en la biblioteca de tu escuela búscalos como archivos PDF.
11. Busca en la red entrevistas con autores reconocidos, puedes encontrarlos como texto o como video.
12. Si escribes entre comillas, por ejemplo: "caminos, azar y probabilidad", el buscador listará todas las páginas donde encuentre esta frase literalmente.
13. Sistematiza tus propios métodos de búsqueda.
14. Recuerda que los libros son insustituibles y que las referencias que encuentras en la red son sólo otra forma de adquirir información. Además siempre será mejor, ya sea que consultes libros o la red, que busques en los textos de los autores que generaron la información que estás investigando.

Recomendaciones generales y consultadas por bloque

Biblioteca Nacional de Manipuladores Virtuales
http://nlvm.usu.edu/es/nav/vlibrary.html
Conjunto de simuladores que permiten trabajar algunos de los temas desarrollados en clase con el apoyo de la computadora.

Índice de Unidades Didácticas DESCARTES (Recursos TIC)
http://recursostic.educacion.es/descartes/web/indice_ud.php
Vasta colección de applets y recursos informáticos para apoyo de temas de matemáticas, desde nivel básico hasta nivel superior.

Centro Virtual de Divulgación de las Matemáticas
www.divulgamat.net/
Sitio en el cual podrás encontrar valiosa información sobre aspectos muy variados referentes a las matemáticas, desde propuestas pedagógicas para desarrollar algunos temas hasta retos matemáticos, historia, relación de las matemáticas con la sociedad y el desarrollo de la cultura.

Álgebra con *papas*
http://agrega.juntadeandalucia.es/visualizar/es/es-an_2013040312_9122724/false
Recurso interactivo de álgebra para educación secundaria que consiste en una serie de ejercicios interactivos multimedia, hechos con el programa *Hot Potatoes*.

Sector Matemática
www.sectormatematica.cl/
Blog en el cual se comparten experiencias docentes así como propuestas para mejorar la enseñanza de algunos tópicos de matemáticas. Incluye ligas diversas, apartados y áreas de interés.

Juegos de Lógica y Estrategia
http://juegosdelogica.net/
Test interactivos de inteligencia, estrategia y lógica que permiten el estudio de las matemáticas por medio de juegos y acertijos.

EducaPlus
www.educaplus.org/
Simuladores diversos acerca de temas de las matemáticas, ciencias, artes, tecnologías, que pretende mejorar la práctica docente y la experiencia de aprendizaje del estudiante.

GenMagic
www.genmagic.net/educa/
Portal de creación e investigación multimedia educativa.

Cuéntame
www.cuentame.inegi.org.mx/
Es una página de INEGI que está dirigida a niños donde se otorgan cifras acerca del territorio, la población y la economía de México.

Pensamiento lógico matemático
http://red.ilce.edu.mx/index.php?option=com_content&view=article&id=17&Itemid=117
Página de la Red ILCE que fomenta la implementación de estrategias didácticas fundamentadas en las competencias lógico matemáticas con el fin de sensibilizar a los estudiantes utilizando razonamientos lúdicos, entre otros.

Simulador de exámenes
www.thatquiz.org/es/

Unidades didácticas interactivas ejemplares
http://arquimedes.matem.unam.mx/UDIEs/

Proyecto piloto de recursos interactivos
http://arquimedes.matem.unam.mx/PRILiP/

Pequeños sistemas de autor
http://arquimedes.matem.unam.mx/pegsisa/

Recomendaciones por bloque

Bloque 1

Instituto de Matemáticas de la UNAM
http://paginas.matem.unam.mx/cprieto/biografias-de-matematicos-a-e/197-eratostenes
Biografía de Eratóstenes de Cirene.

Biografías y vidas
http://www.biografiasyvidas.com/biografia/j/jwarizmi.htm
Biografía de Abu Jafar Mohammet ibn Mose Al-Jwarizmi.

Geometría dinámica del triángulo
http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2002/geometria_triangulo/contenido.htm

Bloque 2

Centro virtual de divulgación de las matemáticas
http://principiatechnologica.com/2013/05/21/distancia-y-dimensiones-de-la-luna-aristarco-de-samos/
Biografía de Aristarco de Samos.

Disfruta las matemáticas
www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/teselaciones.html
Teselaciones básicas.

Teselaciones realizadas por el artista holandés M. C. Escher:
http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/escher.htm
Teselaciones realizadas por el artista holandés M. C. Escher.

Bloque 3

Enciclopedia de Ciencias y Tecnología en Argentina
http://cyt-ar.com.ar/cyt-ar/index.php/Ladislao_José_Biro
Biografía de Ladislao José Biro.

Calculadora científica
http://web2.0calc.es/

Descartes. Matemáticas interactivas
http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Semejanza_aplicaciones/teorema_de_thales.htm
El teorema de Tales.

Bloque 4

Inforeloj
www.inforeloj.com/spa/item/longitud_harrison.html
John Harrison y la longitud.

Sextante
http://boletinpatron.com/index.php/el-sextante-su-historia-que-es-y-para-que-sirve/

Astrolabio
www.astromia.com/glosario/astrolabio.htm

Bloque 5

Euclides 59
http://euclides59.wordpress.com/2012/10/28/ada-lovelace-biografia-y-obra/
Biografía de Ada Lovelace.

Problemas para resolver con sistemas de ecuaciones
www.conevyt.org.mx/colaboracion/colabora/objetivos/libros_pdf/sma3_u2lecc14.pdf

Biblioteca digital del ILCE
http://bibliotecadigital.ilce.edu.mx/sites/telesecundaria/tsm01g01v02/u03t04s01.html
Juegos equitativos

Ligas generales

Correo del Maestro. Revista para profesores de educación básica.
www.correodelmaestro.com
En esta página puedes encontrar todos los temas que abordan los docentes en la educación básica.

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa
www.clame.org.mx/relime.htm
Publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Revista Educación Matemática
www.revista-educacion-matematica.org.mx/revista/
Publicación internacional arbitrada que ofrece un foro académico para la presentación y discusión de ideas, conceptos, propuestas y modelos que puedan contribuir a la comprensión y la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en diversos contextos y latitudes.

Revista EPSILON de la SAEM THALES
http://thales.cica.es/epsilon
Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática.

PNA. Revista de investigación en Didáctica de la Matemática
www.pna.es
Revista de investigación en Didáctica de la Matemática cuyo objetivo es promover y difundir la investigación de calidad que se realiza en España y el mundo.

UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática
www.fisem.org/www/union/
Publicación que difunde trabajos sobre educación matemática, destinados al profesorado en activo, de todos los niveles educativos, esto es, desde educación infantil hasta la universidad.

Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas
www.sinewton.org/numeros
Publicación que incluye trabajos de interés para el profesorado de educación primaria y secundaria, principalmente.

NrichMaths
http://nrich.maths.org/frontpage
Sitio inglés donde se proponen ejercicios desafiantes de matemáticas.

Coolmath Store
www.coolmath-games.com/
Lecciones, juegos y aplicaciones divertidas de matemáticas gratuitos.

Math worksheets and printables
www.education.com/worksheets/math/
Hojas de trabajo de matemáticas para un aprendizaje atractivo.

Red Escolar ILCE
http://red.ilce.edu.mx
Un espacio para el fomento del aprendizaje y la cultura digitales.

Khan Academy
https://es.khanacademy.org/
Retos interactivos, evaluaciones y videos desde cualquier computadora con acceso a la web.

Banco de imágenes

© 4Freephotos: p. 72 b.

© Pixabay: p. 72 a (Pdphotos), p. 73 f (Hans), p. 90 (ab. der.) (GLady).

© Shutterstock: pp. 42-43, 47, 65 (arr. der.), 72 c, 73 d-e, 88, 90 (arr. izq.), 91 (arr. izq.), 108, 112, 114-115, 121, 123, 129, 130, 164-165, 175, 178 (ab. izq. y der.), 195, 205, 213-215, 224, 239, 240, 244.

© Instituto Nacional de Antropología e Historia: p.90: "El Castillo" o Pirámide de Kukulkán, Chichen Itzá, Yucatán.

Obras artísticas

p. 86: *Beldad* (2012), Beldad Cantorrales (1970), vitral; **p. 91:** *Avatar* (2012), Beldad Cantorrales (1970), acrílico sobre tela; **p. 92:** *Circle Limit IV*, The M.C. Escher Company-Holland (2007); **p. 214:** Andrew Dunn; **p. 239:** Chad Zuber (Shutterstock); **p. 251:** *Origins of cyberspace: a library on the history of computing, networking, and telecommunications*, Diana H. Hook, Jeremy M. Norman y Michael R. Williams (2002). Norman Publishing, Norman Publishing; **p. 252:** Jitze Couperus (arr.); **p. 252:** *Ada Lovelace* (1836), Margaret Sarah Carpenter (1793-1872), óleo sobre tela, 216 cm x 137 cm, fotografía: British Goverment Art Collection (ab.); **p. 253:** ENIAC (libre de derechos).

Este libro se imprimió en
Reproducciones Fotomecánicas, S.A. de C.V.,
Democracias 116, San Miguel Amantla,
C.P. 02700, México, D.F.,
en MES de 2014.

La tirada fue de
XXX,XXX ejemplares.